http://vestnik.mrsu.ru
ISSN Print 2658-4123
ISSN Online 2658-6525

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICS AND MATHEMATICS

УДК 519.85:622.276.42 DOI: 10.15507/2658-4123.031.202101.161-174

Оригинальная статья

Применение метода Галеркина с разрывными базисными функциями к исследованию динамики изменения температуры и давления в пласте с нагнетательной скважиной и трещиной гидроразрыва

Р. В. Жалнин[1], В. Ф. Масягин[1*], Е. Е. Пескова[1], В. Ф. Тишкин[2]
[1]ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)
[2]ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (г. Москва, Российская Федерация)
[*]masyaginvf@mrsu.ru

Введение. В данной работе численно моделируется задача распространения температуры в нефтеносном пласте с трещиной гидроразрыва, в который закачивается охлаждающая жидкость посредством вертикальной нагнетательной скважины.
Материалы и методы. Для описания процесса распространения температуры в пласте под действием нагнетаемой в него жидкости используется уравнение конвективного теплообмена Фурье – Кирхгофа. Для решения этого уравнения применяется метод Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных неструктурированных сетках. Для описания процесса изменения давления в пласте под действием работы нагнетательной скважины применяется уравнение, полученное на основе уравнения неразрывности и закона Дарси. Для его решения используется метод Галеркина с разрывными базисными функциями на неструктурированной треугольной сетке. Для распараллеливания численного алгоритма применяется библиотека MPI.
Результаты исследования. В статье представлен численный алгоритм и результаты моделирования динамики полей температуры и давления в нефтеносном пласте с трещиной гидроразрыва, в который посредством вертикальной нагнетательной скважины закачивается охлаждающая жидкость.
Обсуждение и заключение. Реализована численная методика на основе разрывного метода Галеркина для математического моделирования температурного поля и поля давления в нефтеносном пласте с трещиной гидроразрыва и нагнетательной скважиной. Полученные картины для распределения температуры и давления в пласте адекватны и хорошо согласуются с заданными начально-краевыми условиями. Дальнейшая работа в данном направлении предполагает моделирование на тетраэдральных неструктурированных сетках для более точного исследования протекающих процессов.

Ключевые слова: разрывный метод Галеркина, вертикальная нагнетательная скважина, гидравлический разрыв пласта, уравнение конвективного теплообмена, уравнение неразрывности, закон Дарси, неструктурированные сетки, разнесенные сетки, MPI

Финансирование: исследование выполнено при поддержке ФГБУ «Российский фонд фундаментальных исследований» (проекты № 18-41-130001, № 18-31-00102) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-2007.2018.1).

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Применение метода Галеркина с разрывными базисными функциями к исследованию динамики изменения температуры и давления в пласте с нагнетательной скважиной и трещиной гидроразрыва / Р. В. Жалнин, В. Ф. Масягин, Е. Е. Пескова, В. Ф. Тишкин. – DOI 10.15507/2658-4123.031.202101.161-174 // Инженерные технологии и системы. – 2021. – Т. 31, № 1. – С. 161–174.

Original article

Application of the Discontinuous Galerkin Method to the Study of the Dynamics of Temperature and Pressure Changes in a Formation with an Injection Well and a Hydraulic Fracture

R. V. Zhalnin[a], V. F. Masyagin[a*], E. E. Peskova[a], V. F. Tishkin[b]

[a]*National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

[b]*Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)*

[*]*masyaginvf@mrsu.ru*

Introduction. In this article, the problem of temperature distribution in an oil-bearing formation with a hydraulic fracture and a vertical injection well is numerically modeled.
Materials and Methods. To describe the process of temperature distribution in the formation under the action of the fluid injected into the formation, the Fourier-Kirchhoff equation of convective heat transfer is used. To solve this equation, the discontinuous Galerkin method on staggered unstructured grids is used. To describe the process of pressure change in the formation under the action of the injection well, an equation is used that is obtained based on the continuity equation and Darcy's law. To solve it, the discontinuous Galerkin method on an unstructured triangular grid is used. To parallelize the numerical algorithm, the MPI library is used.
Results. The article presents a numerical algorithm and the results of modeling the dynamics of the temperature fields in an oil reservoir with a hydraulic fracture and a vertical injection well.
Discussion and Conclusion. A numerical algorithm based on the discontinuous Galerkin method for math modeling of the temperature and pressure fields in a oil-bearing formation with a hydraulic fracture and injection well was developed and implemented. The results obtained for the distribution of temperature and pressure in the fracture are adequate and in good agreement with the specified initial-boundary conditions. Further work in this direction involves modeling on tetrahedral unstructured meshes for a more accurate study of the ongoing processes.

Keywords: discontinuous Galerkin method, vertical injection well, hydraulic fracturing, convective heat transfer equation, continuity equation, Darcy's law, unstructured grids, spaced grids, MPI

Funding: The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Projects No. 18-41-130001, No. 18-31-00102) and the grant from the President of the Russian Federation for young Russian Candidates of Science (MK-2007.2018.1).

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

For citation: Zhalnin R.V., Masyagin V.F., Peskova E.E., et al. Application of the Discontinuous Galerkin Method to the Study of the Dynamics of Temperature and Pressure Changes in a Formation with an Injection Well and a Hydraulic Fracture. *Inzhenerernyye tekhnologii i sistemy* = Engineering Technologies and Systems. 2021; 31(1):161-174. DOI: https://doi.org/10.15507/2658-4123.031.202101.161-174

Введение

В настоящее время в связи с вводом в эксплуатацию месторождений с трудноизвлекаемыми запасами и значительной выработкой многих крупных месторождений развитие нефтегазовой промышленности России происходит на фоне внушительного падения запасов нефти и газа. Одним из важнейших факторов, оказывающих влияние на извлечение нефти из месторождения, является состояние призабойной зоны пласта (ПЗП). Важным источником информации о ПЗП являются гидродинамические исследования пластов и скважин (ГДИС).

В устоявшихся методах ГДИС анализируются кривые давления в бесконечном пласте при неустановившемся режиме радиальной фильтрации. Основные подходы (анализ данных по кривой падения давления и по кривой восстановления давления) базируются на решении уравнения пьезопроводности. Однако для более полного исследования скважин очень важно рассматривать, наряду с методами ГДИС, методы термометрии[1]. Для скважин с гидравлическим разрывом пласта такие исследования особенно важны. Отсюда возникает необходимость в разработке математической модели для системы «скважина – трещина – пласт»[2]. Использование методов термометрии скважин и пластов на сегодняшний день позволяет увеличить нефтеотдачу пластов за счет более эффективных мер по увеличению нефтедобычи.

Обзор литературы

Настоящая работа посвящена математическому моделированию процесса изменения температурного поля и поля давления в пласте с трещиной гидроразрыва под действием нагнетания охлаждающей жидкости в вертикальную скважину [1]. Для описания математической модели данного процесса используются уравнения конвекции-диффузии. В настоящее время существует множество подходов к решению этих уравнений. Одним из перспективных и активно развивающихся является метод Галеркина с разрывными базисными функциями [2–4], который прекрасно зарекомендовал себя для решения уравнений конвективного типа [5–8]. Также активно развиваются подходы к созданию лимитеров повышенного порядка точности, которые обеспечивают монотонность решения, полученного с помощью разрывного метода Галеркина [9–11]. Дальнейшее развитие метода Галеркина с разрывными базисными функциями привело к его модификации с использованием разнесенных сеток (Staggered Discontinuous Galerkin Method), которая объединяет хорошие качества этих способов [12–15]. К примеру, в ряде работ был построен оригинальный вычисли-

[1] Гидродинамический разрыв пласта / Д. С. Кузнецов [и др.]. Томск, 2008. 114 с.

[2] **Чекалюк Э. Б.** Термодинамика нефтяного пласта. М.: Недра, 1965. 238 с.; Руководство по исследованию и интерпретации. Термодинамические исследования при различных режимах работы скважин. Уфа, 2002. 248 с.

тельный алгоритм, в котором вспомогательные переменные, введенные для понижения порядка исходных уравнений переноса тепла, рассчитываются на двойственной сетке, представленной в виде медианных контрольных объемов вокруг узлов основной сетки [16–19]. Искомые величины аппроксимируются на основной неструктурированной треугольной сетке.

Материалы и методы

Для описания динамики изменения температуры, скорости и давления будем рассматривать следующие уравнения, которые подробно представлены в одной из наших работ[3].

Процесс переноса тепла:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)-$$

$$-c\rho\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right),\left(x,y\right)\in D,$$

$$0<t\le T_{\max}, \qquad (1)$$

$$T\left(x,y,0\right)=T_0, 0<t\le T_{\max},$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}=0,\left(x,y\right)\in\partial D, 0<t\le T_{\max},$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}=\beta\left(T-T_\Gamma\right)n_x+\beta\left(T-T_\Gamma\right)n_y,$$

$$\left(x,y\right)\in\Gamma, 0<t\le T_{\max}.$$

Процесс изменения давления [20]:

$$c_r\frac{\partial p}{\partial t}-div\left(\frac{\kappa}{\mu}grad\left(p\right)\right)=0,$$

$$\left(x,y\right)\in D, 0<t\le T_{\max}, \qquad (2)$$

$$p\left(x,y,0\right)=p_0\left(x,y\right), 0<t\le T_{\max},$$

$$-\frac{\kappa}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}=0,\left(x,y\right)\in\partial D, 0<t\le T_{\max},$$

$$p=p_\Gamma,\left(x,y\right)\in\Gamma, 0<t\le T_{\max}.$$

Для описания скорости течения жидкости используется закон Дарси[4]:

$$\boldsymbol{u}=-\frac{\kappa}{\mu}grad\left(p\right),\left(x,y\right)\in D. \qquad (3)$$

Ранее авторами был представлен подробный вывод уравнений для решения систем (1)–(3) на неструктурированной двойственной сетке, здесь приведем лишь полученные выражения[5].

Для решения системы (1) используются выражения:

$$c\rho\sum_{i=0}^{2}\frac{dT_{ij}}{dt}\int_{K_j}\phi_i^j\phi_k^j dS=-\oint_{\partial K_j}n_x\omega_x^\Gamma\phi_k^j dl-$$

$$-\oint_{\partial K_j}n_y\omega_y^\Gamma\phi_k^j dl+\int_{K_j}\omega_x\frac{\partial\phi_k^j}{\partial x}dS+\int_{K_j}\omega_y\frac{\partial\phi_k^j}{\partial y}dS-$$

$$-c\rho\left(\oint_{\partial K_j}\left(uT\right)^\Gamma n_x\phi_k^j dl+\oint_{\partial K_j}\left(vT\right)^\Gamma n_y\phi_k^j dl\right)+$$

$$+c\rho\left(\int_{K_j}T_j\frac{\partial\left(u\phi_k^j\right)}{\partial x}dS+\int_{K_j}T_j\frac{\partial\left(v\phi_k^j\right)}{\partial y}dS\right),$$

$$\forall\phi_k^j\left(x,y\right), k=0...2, \qquad (4)$$

$$\sum_{i=0}^{2}\omega_{xij}\int_{D_j}\psi_i^j\psi_k^j dS=$$

$$=-\oint_{\partial D_j}n_x\lambda T^\Gamma\psi_k^j dl+\int_{D_j}T\lambda\frac{\partial\psi_k^j}{\partial x}dS,$$

$$\forall\psi_k^j\left(x,y\right), k=0\ldots2, \qquad (5)$$

[3] **Жалнин Р. В., Масягин В. Ф., Пескова Е. Е.** Применение разрывного метода Галеркина для математического моделирования динамики распространения температуры в пласте с нагнетательной скважиной // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: материалы XIV Междунар. науч.-техн. конф., 3–6 декабря 2019 г., Пенза / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. Пенза: Изд-во ПГУ, 2019. С. 54–61. URL: https://dep_vipm.pnzgu.ru/files/dep_vipm.pnzgu.ru/konference/achm_2019.pdf (дата обращения: 12.02.2021).

[4] Там же.

[5] Там же.

$$\sum_{i=0}^{2}\omega_{yij}\int_{D_j}\psi_i^j\psi_k^j dS =$$

$$= -\oint_{\partial D_j} n_y\lambda T^{\Gamma}\psi_k^j dl + \int_{D_j} T\lambda\frac{\partial\psi_k^j}{\partial y}dS,$$

$$\forall\psi_k^j(x,y),\ k = 0\ldots 2. \qquad (6)$$

Для решения систем (2), (3) используются выражения:

$$c_r\sum_{i=0}^{2}\frac{dp_{ij}}{dt}\int_{K_j}\phi_i^j\phi_k^j dS = \oint_{\partial K_j} n_x u^{\Gamma}\phi_k^j dl +$$

$$+\oint_{\partial K_j} n_y v^{\Gamma}\phi_k^j dl - \int_{K_j} u\frac{\partial\phi_k^j}{\partial x}dS - \int_{K_j} v\frac{\partial\phi_k^j}{\partial y}dS,$$

$$\forall\varphi_k^j(x,y),\ k = 0\ldots 2, \qquad (7)$$

$$\sum_{i=0}^{2}u_{ij}\int_{K_j}\varphi_i^j\varphi_k^j dS =$$

$$= -\oint_{K_j} n_x\frac{\kappa}{\mu}p^{\Gamma}\varphi_k^j dl + \int_{K_j} p\frac{\kappa}{\mu}\frac{\partial\varphi_k^j}{\partial x}dS,$$

$$\forall\varphi_k^j(x,y),\ k = 0\ldots 2, \qquad (8)$$

$$\sum_{i=0}^{2}v_{ij}\int_{K_j}\varphi_i^j\varphi_k^j dS =$$

$$= -\oint_{\partial K_j} n_y\frac{\kappa}{\mu}p^{\Gamma}\varphi_k^j dl + \int_{K_j} p\frac{\kappa}{\mu}\frac{\partial\varphi_k^j}{\partial y}dS,$$

$$\forall\varphi_k^j(x,y),\ k = 0\ldots 2, \qquad (9)$$

где $\left\{\phi_i^j(x,y)\right\}$, $\left\{\psi_i^j(x,y)\right\}$ – системы базисных функций, заданные на элементе K_j (элементы основной треугольной сетки) и D_j (элементы двойственной сетки) соответственно, в виде проекции на которые находятся температура, давление и компоненты вектора скорости[6].

Для нахождения величин $(uT)^{\Gamma}$ и $(vT)^{\Gamma}$ на границах элементов в системе (4) используется потоковая функция Лакса – Фридрихса[7]. При вычислении потоковых величин $T^{\Gamma}, \omega_x^{\Gamma}, \omega_y^{\Gamma}$ на границе элементов в системах (4)–(6) применяется потоковая функция [21]. С учетом использования двойственных сеток потоковые величины представляются в виде:

$$T^{\Gamma} = T,$$

$$\omega_x^{\Gamma} = \omega_x - C_{11}\left(T^+ - T^-\right)n_x,$$

$$\omega_y^{\Gamma} = \omega_y - C_{11}\left(T^+ - T^-\right)n_y,$$

где T^+ – значение температуры из ячейки, для которой нормаль $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y)$ является внешней, а T^+ – значение температуры из ячейки, для которой нормаль $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y)$ является внутренней; C_{11} – стабилизирующая добавка.

На граничных ребрах, с учетом типа граничного условия, получаем:

$$T \ \ = T^+,$$

$$\omega_x^{\Gamma} = \beta\left(T - T_{\Gamma}\right)n_x,$$

$$\omega_y^{\Gamma} = \beta\left(T - T_{\Gamma}\right)n_y.$$

Для вычисления потоковых величин p^{Γ}, u^{Γ}, v^{Γ} в системах (7)–(9) также используются стабилизирующие добавки, но в данном случае аппроксимация строится только на треугольной сетке. Вид потоковых функций представлен ниже:

$$p^{\Gamma} = \frac{\left(p^+ + p^-\right)}{2},$$

$$u^{\Gamma} = \frac{\left(u^+ + u^-\right)}{2} - C_{11}\left(p^+ - p^-\right)n_x,$$

$$v^{\Gamma} = \frac{\left(v^+ + v^-\right)}{2} - C_{11}\left(p^+ - p^-\right)n_y,$$

[6] Там же.

[7] **Shu C.-W.** Numerical Methods for Hyperbolic Conservation Laws // Conference Proceedings (AM 257), 2007. 2007. 32 p. URL: https://mathema.tician.de/dl/academic/notes/257/257.pdf (дата обращения: 11.02.2021).

где верхний индекс «+» обозначает величины из ячейки, для которой нормаль $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y)$ является внешней, а верхний индекс «–» – величины из ячейки, для которой нормаль $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y)$ является внутренней; C_{11} – стабилизирующая добавка.

На граничных ребрах получаем следующий вид:

$$p^{\Gamma} = p^{+},$$
$$u^{\Gamma} = qn_x,$$
$$v^{\Gamma} = qn_y.$$

В системах (4)–(9) необходимо с высокой точностью вычислять поверхностные и контурные интегралы. Для этого используются квадратурные формулы Гаусса [22]. Поверхностные интегралы вычисляются по трем точкам, контурные интегралы вычисляются с использованием двухточечного шаблона. Для подавления нефизических осцилляций используется лимитер TVD[8]. Для аппроксимации по времени используется явная схема Эйлера.

Результаты исследования

Описанный вычислительный алгоритм был реализован в виде программного пакета для расчета динамики изменения температуры и давления в нефтеносном пласте. Для сокращения времени расчетов была использована технология параллельных вычислений MPI.

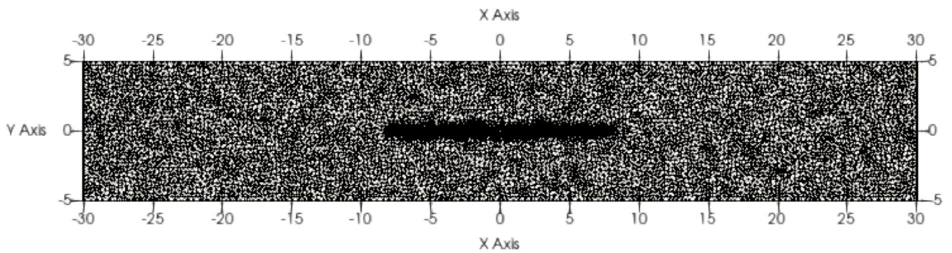
Для анализа полученных результатов рассматривалась следующая постановка задачи: $T_0 = 363$ K, $c = 2\,000$ Дж/кг·K, $\rho = 950$ кг/м^3, $\lambda = 2{,}5208$, $\mu = 0{,}315 \cdot 10^{-4}$ Па·с, $p_0 = 2{,}5 \cdot 10^7$ Па, $p_\Gamma = 2{,}5 \cdot 10^7$ Па, $\beta = 150$ Вт/м^2·K. Для трещины были заданы следующие значения параметров: $c_r = 4{,}18968 \cdot 10^{-9}$ Па$^{-1}$, $\kappa = 2{,}96 \cdot 10^{-15}$ м^2. Для пласта были заданы следующие значения параметров: $c_r = 0{,}2505 \cdot 10^{-9}$ Па$^{-1}$, $\kappa = 5 \cdot 10^{-17}$ м^2.

Рассматривается область длиной 60 м и шириной 10 м. В центре области находится скважина с радиусом 0,025 м. Слева и справа к скважине симметрично примыкают трещины длиной 8 м и шириной 0,005 м каждая.

На рисунке 1 представлена расчетная сетка для описанной задачи. Вдоль трещины наблюдается заметное сгущение сетки. Расчетная сетка содержит 36 339 ячеек основной неструктурированной сетки.

Расчет производился с использованием параллельного комплекса программ на 12 процессорах [23]. На рисунке 2 представлена декомпозиция расчетной области по процессорам.

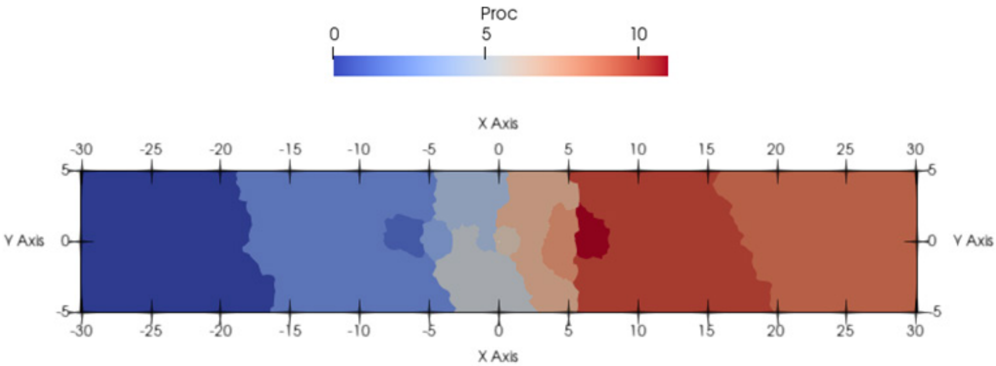
На практике наибольший интерес представляет состояние призабойной зоны пласта. В связи с этим, а также из-за большого масштаба задачи дальнейшие рисунки представляют не всю расчетную область, а ее часть, приближенную к скважине. На рисунке 3



Р и с. 1. Сетка

F i g. 1. Mesh

[8] **Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. 2-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит, 2012. 656 с.

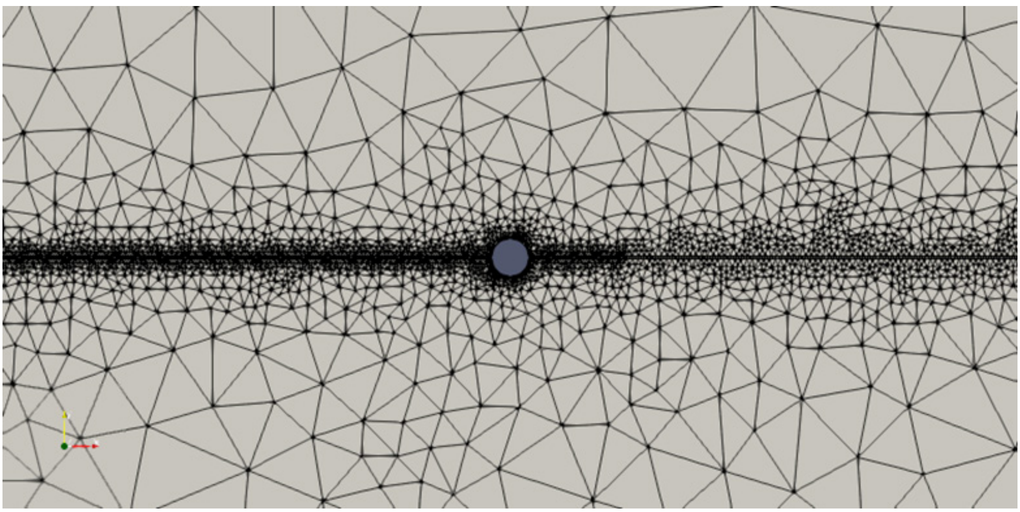


Р и с. 2. Декомпозиция расчетной области
F i g. 2. Decomposition of the computational domain

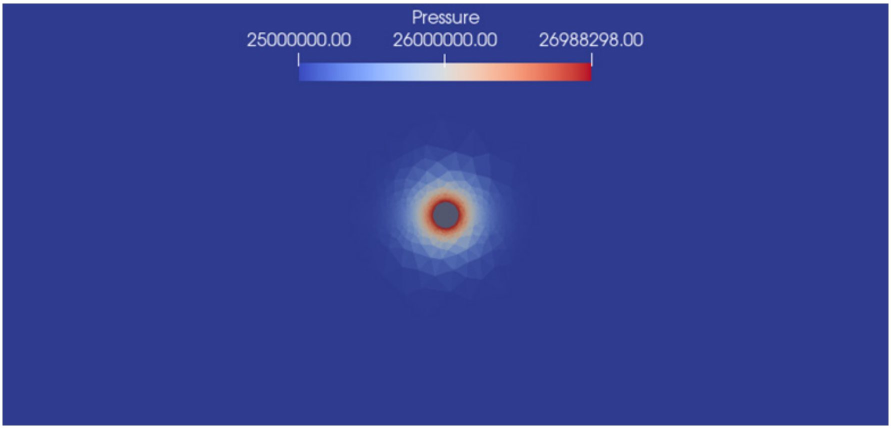
представлена расчетная сетка возле скважины, диаметр скважины 0,05 м.

На рисунках 4–6 представлено распределение поля давления в различные моменты времени. Из рисунков видно, что с течением времени вдоль трещины давление растет заметно быстрее, по сравнению с пластом, что согласуется с заданными параметрами задачи.

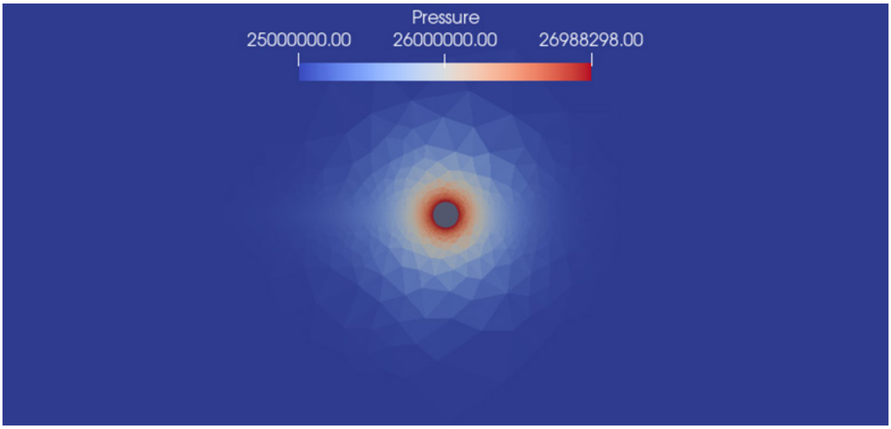
На рисунках 7–9 представлены картины распределения поля температуры в различные моменты времени. Из рисунков видно, что холодная закачиваемая через вертикальную нагнетательную скважину жидкость охлаждает пласт. Можно отметить, что вдоль трещины охлаждение происходит немного интенсивнее, что согласуется с наблюдаемой картиной распределения давления. Существенное уменьшение температуры наблюдаются вблизи скважины и вдоль трещины, в частности на ее створках.



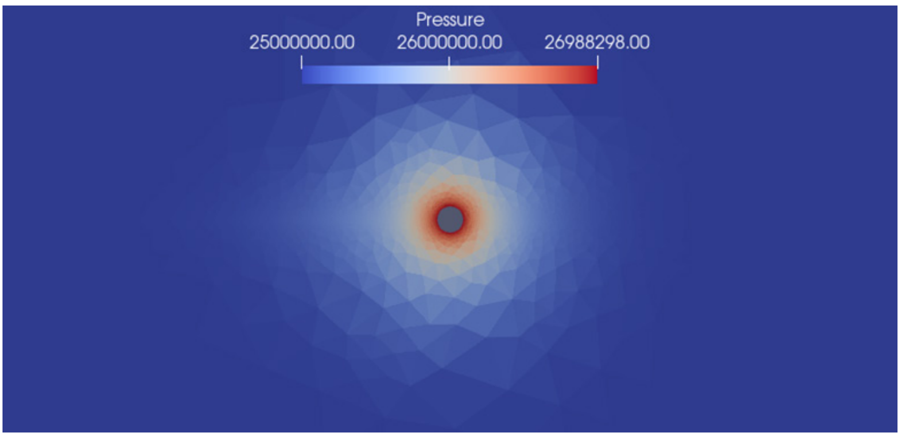
Р и с. 3. Сетка возле скважины
F i g. 3. Mesh near the well



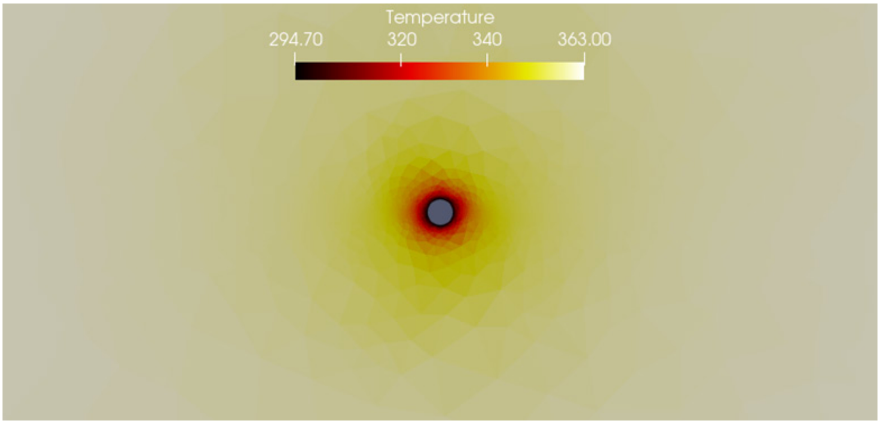
Р и с. 4. Распределение давления, $t = 1$ с
F i g. 4. Distribution of the pressure, $t = 1$ s



Р и с. 5. Распределение давления, $t = 5$ с
F i g. 5. Distribution of the pressure, $t = 5$ s

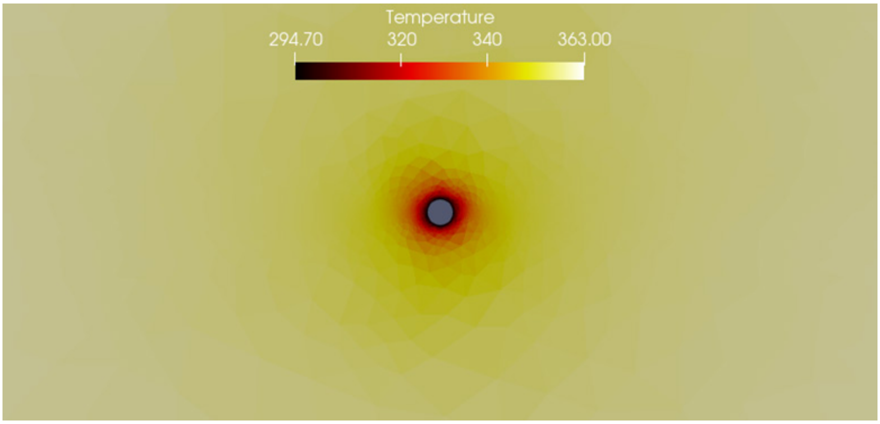


Р и с. 6. Распределение давления, $t = 10$ с
F i g. 6. Distribution of the pressure, $t = 10$ s



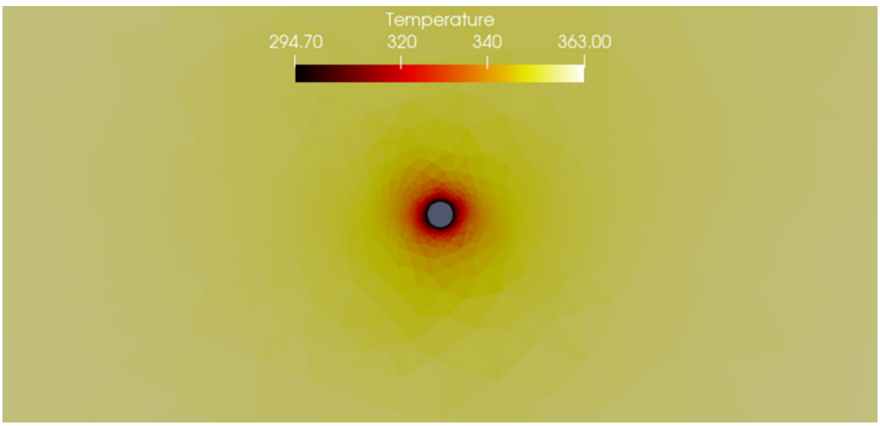
Р и с. 7. Распределение температуры, $t = 1$ с

F i g. 7. Distribution of the temperature, $t = 1$ s



Р и с. 8. Распределение температуры, $t = 5$ с

F i g. 8. Distribution of the temperature, $t = 5$ s



Р и с. 9. Распределение температуры, $t = 10$ с

F i g. 9. Distribution of the temperature, $t = 10$ s

Обсуждение и заключение

В настоящей статье разработан и реализован вычислительный алгоритм для моделирования динамики изменения температуры и давления в нефтеносном пласте. Алгоритм построен на основе метода Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных неструктурированных сетках с применением технологии параллельных вычислений MPI. С использованием разработанного программного кода была исследована задача закачивания в пласт охлаждающей жидкости через вертикальную нагнетательную скважину. Можно сделать вывод, что результаты моделирования показывают адекватные картины для температурного поля и поля давления в пласте, соответствующие заданным начально-краевым условиям. Для более точного моделирования рассматриваемого процесса в дальнейшем планируется решать данную задачу в трехмерной постановке на неструктурированных тетраэдральных сетках.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Применение разрывного метода Галеркина для моделирования температурного поля в вертикальной скважине с трещиной гидроразрыва / В. Ф. Масягин, Ю. О. Бобренева, И. М. Губайдуллин, Р. В. Жалнин // Системы управления и информационные технологии. – 2016. – № 1 (63). – С. 13–16. – URL: http://www.sbook.ru/suit/CONTENTS/160100.pdf (дата обращения: 12.02.2021). – Рез. англ.

2. **Sudirham, J. J.** Space-Time Discontinuous Galerkin Method for Advection–Diffusion Problems on Time-Dependent Domains / J. J. Sudirham, J. J. W. Vegt, R. M. J. Damme. – DOI 10.1016/j.apnum.2005.11.003 // Applied Numerical Mathematics. – 2006. – Vol. 56, Issue 12. – Pp. 1491–1518. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168927405002151?via%3Dihub (дата обращения: 12.02.2021).

3. **Oikawa, I.** Hybridized Discontinuous Galerkin Method for Convection–Diffusion Problems / I. Oikawa. – DOI 10.1007/s13160-014-0137-5 // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. – 2014. – Vol. 31, Issue 2. – Pp. 335–354. – URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s13160-014-0137-5 (дата обращения: 12.02.2021).

4. Local Discontinuous Galerkin Methods with Implicit-Explicit Time-Marching for Multi-Dimensional Convection-Diffusion Problems / H. Wang, S. Wang, Q. Zhang, C.-W. Shu. – DOI 10.1051/m2an/2015068 // ESAIM: M2AN. – 2016. – Vol. 50, No. 4. – Pp. 1083–1105. – URL: https://www.esaim-m2an.org/articles/m2an/abs/2016/04/m2an150054/m2an150054.html (дата обращения: 12.02.2021).

5. **Cockburn, B.** An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems / B. Cockburn. – DOI 10.1007/BFb0096353 // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. Lecture Notes in Mathematics ; A. Quarteroni, ed. – Berlin : Springer, 1998. – Vol. 1697. – Pp. 150–268. – URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007%2FBFb0096353 (дата обращения: 12.02.2021).

6. **Cockburn, B.** The Development of Discontinuous Galerkin Methods / B. Cockburn, G. E. Karniadakis, C.-W. Shu. – DOI 10.1007/978-3-642-59721-3_1 // Discontinuous Galerkin Methods. Lecture Notes in Computational Science and Engineering ; B. Cockburn, G. E. Karniadakis, C.-W. Shu (eds.). – Berlin : Springer, 2000. – Vol. 11. – Pp. 3–50. – URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-59721-3_1#citeas (дата обращения: 12.02.2021).

7. **Cockburn, B.** Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems / B. Cockburn, C.-W. Shu. – DOI 10.1023/A:1012873910884 // Journal of Scientific Computing. – 2001. – Vol. 16, Issue 3. – Pp. 173–261. – URL: https://link.springer.com/article/10.1023%2FA%3A1012873910884#citeas (дата обращения: 12.02.2021).

8. **Ladonkina, M. E.** Application of the RKDG Method for Gas Dynamics Problems / M. E. Ladonkina, O. A. Neklyudova, V. F. Tishkin. – DOI 10.1134/S207004821404005X // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2014. – Vol. 6. – Pp. 397–407. – URL: https://link.springer.com/article/10.1134%2FS207004821404005X#citeas (дата обращения: 12.02.2021).

9. **Ладонкина, М. Е.** Использование усреднений для сглаживания решений в разрывном методе Галеркина / М. Е. Ладонкина, О. А. Неклюдова, В. Ф. Тишкин. – DOI 10.20948/prepr-2017-89 //

Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2017. – № 89. – 32 с. – URL: https://keldysh.ru/papers/2017/prep2017_89.pdf (дата обращения: 12.02.2021). – Рез. англ.

10. **Ladonkina, M. E.** Impact of Different Limiting Functions on the Order of Solution Obtained by RKDG / M. E. Ladonkina, O. A. Neklyudova, V. F. Tishkin. – DOI 10.1134/S2070048213040091 // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2013. – Vol. 5 – Pp. 346–349. – URL: https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048213040091 (дата обращения: 12.02.2021).

11. **Krivodonova, L.** Limiters for High-Order Discontinuous Galerkin Methods / L. Krivodonova. – DOI 10.1016/j.jcp.2007.05.011 // Journal of Computational Physics. – 2007. – Vol. 226, Issue 1. – Pp. 879–896. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999107002136?via%3Dihub (дата обращения: 12.02.2021).

12. **Zhao, L.** A Priori and a Posteriori Error Analysis of a Staggered Discontinuous Galerkin Method for Convection Dominant Diffusion Equations / L. Zhao, E.-J. Park. – DOI 10.1016/j.cam.2018.06.040 // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2018. – Vol. 346. – Pp. 63–83. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042718303923?via%3Dihub (дата обращения: 12.02.2021).

13. **Du, J.** An Adaptive Staggered Discontinuous Galerkin Method for the Steady State Convection–Diffusion Equation / J. Du, E. Chung. – DOI 10.1007/s10915-018-0695-9 // Journal of Scientific Computing. – 2018. – Vol. 77. – Pp. 1490–1518. – URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10915-018-0695-9#article-info (дата обращения: 12.02.2021).

14. **Tavelli, M.** A Pressure-Based Semi-Implicit Space–Time Discontinuous Galerkin Method on Staggered Unstructured Meshes for the Solution of the Compressible Navier – Stokes Equations at All Mach Numbers / M. Tavelli, M. Dumbser. – DOI 10.1016/j.jcp.2017.03.030 // Journal of Computational Physics. – 2017. – Vol. 341. – Pp. 341–376. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999117302255?via%3Dihub (дата обращения: 12.02.2021).

15. **Chung, E. T.** A Sub-Grid Structure Enhanced Discontinuous Galerkin Method for Multiscale Diffusion and Convection-Diffusion Problems / E. T. Chung, W. T. Leung. – DOI 10.4208/cicp.071211.070912a // Communications in Computational Physics. – 2013. – Vol. 14, Issue 2. – Pp. 370–392. – URL: https://clck.ru/TFW77 (дата обращения: 12.02.2021).

16. Решение трехмерных уравнений теплопроводности с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках / Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масягин, В. Ф. Тишкин. – DOI 10.14498/vsgtu1351 // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 19, № 3. – С. 523–533. – URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vsgtu&paperid=1351&option_lang=rus (дата обращения: 12.02.2021). – Рез. англ.

17. Применение разрывного метода Галеркина для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках / Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масягин, В. Ф. Тишкин. – DOI 10.14529/mmp160313 // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2016. – Т. 9, № 3. – С. 144–151. – URL: https://mmp.susu.ru/pdf/v9n3st13.pdf (дата обращения: 12.02.2021). – Рез. англ.

18. Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках / Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масягин, В. Ф. Тишкин. – DOI 10.7868/S0044466916060247 // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56, № 6. – С. 989–998. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?doi=10.7868/S0044466916060247 (дата обращения: 12.02.2021). – Рез. англ.

19. Применение разрывного метода Галеркина для решения обратной задачи диффузии лекарственных веществ из хитозановых пленок / И. М. Губайдуллин, Р. В. Жалнин, В. Ф. Масягин [и др.] // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 2. – С. 94–105. – URL: http://journal.svmo.ru/archive/article?id=1420 (дата обращения: 12.02.2021). – Рез. англ.

20. **Васильев, В. И.** Решение задач однофазной фильтрации методом конечных элементов на вычислительном кластере / В. И. Васильев, М. В. Васильева, Д. Я. Никифоров // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова. – 2016. – № 6. – С. 8–17. – URL: https://clck.ru/TFXvw (дата обращения: 12.02.2021). – Рез. англ.

21. Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems / D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L. D. Marini. – DOI 10.1137/S0036142901384162 // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2002. – Vol. 39, Issue 5. – Pp. 1749–1779. – URL: https://epubs.siam.org/doi/10.1137/S0036142901384162 (дата обращения: 12.02.2021).

22. **Li, B. Q.** Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer / B. Q. Li. – DOI 10.1007/1-84628-205-5 // London : Springer, 2006. – 578 p. – URL: https://link.springer.com/book/10.1007/1-84628-205-5#authorsandaffiliationsbook (дата обращения: 12.02.2021).

23. **Жалнин, Р. В.** Построение параллельного вычислительного алгоритма на основе разрывного метода Галеркина для решения задач конвективного теплообмена на разнесенных неструктурированных сетках / Р. В. Жалнин, В. Ф. Масягин, Е. Е. Пескова. – DOI 10.15507/2079-6900.20.201804.448-459 // Журнал Средневолжского математического общества. – 2018. – Т. 20, № 4. – С. 448–459. – URL: http://journal.svmo.ru/archive/article?id=1636 (дата обращения: 12.02.2021). – Рез. англ.

Поступила 09.10.2020; одобрена после рецензирования 10.12.2020; принята к публикации 20.12.2020

Об авторах:

Жалнин Руслан Викторович, ведущий научный сотрудник, заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Российская Федерация, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, доцент, Researcher ID: Q-6945-2016, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1103-3321, zhrv@mrsu.ru

Масягин Виктор Федорович, старший научный сотрудник, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Российская Федерация, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, Researcher ID: C-2439-2013, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6738-8183, vmasyagin@mrsu.ru

Пескова Елизавета Евгеньевна, младший научный сотрудник, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Российская Федерация, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, Researcher ID: U-7971-2019, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2618-1674, e.e.peskova@mail.ru

Тишкин Владимир Федорович, заведующий отделом ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (125047, Российская Федерация, г. Москва, Миусская пл., д. 4), член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Researcher ID: R-5820-2016, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7295-7002, v.f.tishkin@mail.ru

Заявленный вклад соавторов:

Р. В. Жалнин – обсуждение численного алгоритма в части аппроксимации конвективных слагаемых в уравнении переноса тепла.

В. Ф. Масягин – реализация основного параллельного численного алгоритма на основе метода Галеркина с разрывными базисными функциями, активное участие в разработке математической модели и в обсуждении выбора начально-краевых условий для расчетной задачи, проведение численных расчетов.

Е. Е. Пескова – обзор литературы по отечественным и зарубежным источникам, участие в разработке математической модели исследуемого процесса.

В. Ф. Тишкин – постановка задачи и общее руководство работой.

Благодарности: авторы выражают признательность анонимным рецензентам.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

REFERENCES

1. Masyagin V.F., Bobreneva Yu.O., Gubaidullin I.M., et al. Application of Discontinuous Galerkin Method for Modeling of the Temperature Field in a Vertical Well with Hydraulic Fracture. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* = Control Systems and Information Technology. 2016; (1):13-16. Available at: http://www.sbook.ru/suit/CONTENTS/160100.pdf (accessed 12.02.2021). (In Russ.)

2. Sudirham J.J., Vegt J.J.W., Damme R.M.J. Space-Time Discontinuous Galerkin Method for Advection–Diffusion Problems on Time-Dependent Domains. *Applied Numerical Mathematics*. 2006; 56(12):1491-1518. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.apnum.2005.11.003

3. Oikawa I. Hybridized Discontinuous Galerkin Method for Convection–Diffusion Problems. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*. 2014; 31(2):335-354. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/s13160-014-0137-5

4. Wang H., Wang S., Zhang Q., et al. Local Discontinuous Galerkin Methods with Implicit-Explicit Time-Marching for Multi-Dimensional Convection-Diffusion Problems. *ESAIM: M2AN*. 2016; 50(4):1083-1105. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1051/m2an/2015068

5. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems. In: A. Quarteroni, ed. Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1697. Berlin: Springer; 1998. p. 150-268. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0096353

6. Cockburn B., Karniadakis G.E., Shu C.-W. The Development of Discontinuous Galerkin Methods. In: B. Cockburn, G.E. Karniadakis, C.-W. Shu (eds.). Discontinuous Galerkin Methods. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Vol. 11. Berlin: Springer; 2000. p. 3-50. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-59721-3_1

7. Cockburn B., Shu C.-W. Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems. *Journal of Scientific Computing*. 2001; 16(3):173-261. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1023/A:1012873910884

8. Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V.F. Application of the RKDG Method for Gas Dynamics Problems. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2014; 6:397-407. (In Russ.) DOI: https://doi.org/10.1134/S207004821404005X

9. Ladonkina M.Ye., Neklyudova O.A., Tishkin V.F. Application of Averaging to Smooth the Solution in DG Method. *Preprint IPM im. M.V. Keldysha* = Keldysh Institute Preprints. 2017; (89). 32 p. (In Russ.) DOI: https://doi.org/10.20948/prepr-2017-89

10. Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V.F. Impact of Different Limiting Functions on the Order of Solution Obtained by RKDG. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2013; 5:346-349. (In Russ.) DOI: https://doi.org/10.1134/S2070048213040091

11. Krivodonova L. Limiters for High-Order Discontinuous Galerkin Methods. *Journal of Computational Physics*. 2007; 226(1):879-896. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.05.011

12. Zhao L., Park E.-J. A Priori and a Posteriori Error Analysis of a Staggered Discontinuous Galerkin Method for Convection Dominant Diffusion Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2018; 346:63-83. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.06.040

13. Du J., Chung E. An Adaptive Staggered Discontinuous Galerkin Method for the Steady State Convection–Diffusion Equation. *Journal of Scientific Computing*. 2018; 77:1490-1518. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/s10915-018-0695-9

14. Tavelli M., Dumbser M. A Pressure-Based Semi-Implicit Space–Time Discontinuous Galerkin Method on Staggered Unstructured Meshes for the Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations at All Mach Numbers. *Journal of Computational Physics.* 2017; 341:341-376. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.03.030

15. Chung E.T., Leung W.T. A Sub-Grid Structure Enhanced Discontinuous Galerkin Method for Multiscale Diffusion and Convection-Diffusion Problems. *Communications in Computational Physics*. 2013; 14(2):370-392. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.4208/cicp.071211.070912a

16. Zhalnin R.V., Ladonkina M.E., Masyagin V.F., et al. Solution of 3D Heat Conduction Equations Using the Discontinuous Galerkin Method on Unstructured Grids. *Vestnik SamGTU. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* = J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2015; 19(3):523-533. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1351

17. Zhalnin R.V., Ladonkina M.Ye., Masyagin V.F., et al. Discontinuous Finite-Element Galerkin Method for Numerical Solution of Parabolic Problems in Anisotropic Media on Triangle Grids. *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie"* = Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. 2016; 9(3):144-151. (In Russ.) DOI: https://doi.org/10.14529/mmp160313

18. Zhalnin R.V., Masyagin V.F., Ladonkina M.E., et al. Solving the Problem of Non-Stationary Filtration of Substance by the Discontinuous Galerkin Method on Unstructured Grids. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki* = Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2016; 56(6):989-998. (In Russ.) DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466916060247

19. Gubaydullin I.M., Zhalnin R.V., Masyagin V.F., et al. Application of the DG Method for Solution of Inverse Problem of Medicine Diffusion Out from the Chitosan Film. *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva* = Middle Volga Mathematical Society Journal. 2016; 18(2):94-105. Available at: http://journal.svmo.ru/archive/article?id=1420 (accessed 12.02.2021). (In Russ.)

20. Vasilev V.I., Vasileva M.V., Nikiforov D.Ya. Solving One Phase Filtration Problems Using Finite Element Method on Computing Cluster. *Vestnik Severo-Vostochnogo federalnogo universiteta im. M.K. Ammosova* = Vestnik of North-Eastern Federal University. 2016; (6):8-17. URL: https://clck.ru/TFXvw (accessed 12.02.2021). (In Russ.)

21. Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B., et al. Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2002; 39(5):1749-1779. Available at: https://doi.org/10.1137/S0036142901384162

22. Li B.Q. Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer. London: Springer; 2006. 578 p. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/1-84628-205-5

23. Zhalnin R.V., Masyagin V.F., Peskova E.E. Construction of a Parallel Computational Algorithm Based on the Galerkin Discontinuous Method for Solving Convective Heat Transfer Problems on Unstructured Staggered Grids. *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva* = Middle Volga Mathematical Society Journal. 2018; 20(4):448-459. (In Russ.) DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.20.201804.448-459

Submitted 09.10.2020; approved after reviewing 10.12.2020; accepted for publication 20.12.2020

About the authors:

Ruslan V. Zhalnin, Leading Researcher, Head of the Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics of Faculty of Mathematics and Information Technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russian Federation), Cand.Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor, Researcher ID: Q-6945-2016, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1103-3321, zhrv@mrsu.ru

Victor F. Masyagin, Senior Researcher, Associate Professor of the Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics of Faculty of Mathematics and Information Technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russian Federation), Cand.Sc. (Phys.-Math.), Researcher ID: C-2439-2013, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6738-8183, vmasyagin@mrsu.ru

Elizaveta E. Peskova, Researcher, Associate Professor of the Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics of Faculty of Mathematics and Information Technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russian Federation), Cand.Sc. (Phys.-Math.), Researcher ID: U-7971-2019, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2618-1674, e.e.peskova@mail.ru

Vladimir F. Tishkin, Head of the Department of Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russian Federation), Corresponding Member of RAS, D.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Researcher ID: R-5820-2016, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7295-7002, v.f.tishkin@mail.ru

Contribution of the authors:

R. V. Zhalnin – discussion of the numerical algorithm for approximating convective terms in the heat transfer equation.

V. F. Masyagin – implementation of the main parallel numerical algorithm based on the Galerkin method with discontinuous basis functions, active participation in developing the mathematical model and in discussing the choice of initial and boundary conditions for the calculation problem, conducting numerical calculations.

E. E. Peskova – literature review of domestic and foreign sources, participation in the development of a mathematical model of the process under study.

V. F. Tishkin – formulation of the task and general management of the work.

Acknowlegments: The authors express gratitude to the anonymous reviewers.

All authors have read and approved the final manuscript.