http://vestnik.mrsu.ru ISSN Print 2658-4123
ISSN Online 2658-6525

УДК 519.856 DOI: 10.15507/2658-4123.029.201904.496-509

Математическое моделирование основных классов стохастических продуктивных систем

А. А. Бутов*, М. А. Волков, В. Н. Голованов, А. А. Коваленко, Б. М. Костишко, Л. М. Самойлов
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (г. Ульяновск, Россия)
**butov.a.a@gmail.com*

Введение. В статье рассматриваются математические модели двух основных классов процессов в стохастических продуктивных системах. Для многостадийной системы определены условия принадлежности классу «точно в срок» или классу с бесконечным носителем функции распределения времени выполнения продуктивных операций.
Материалы и методы. Описания и исследования моделей осуществляются траекторными (мартингальными) методами. Для систем «точно в срок» и многостадийных стохастических продуктивных систем используются термины и методы процессов случайного блуждания в случайной среде и процессов размножения и гибели. Результаты сформулированы в описаниях характеристик интенсивностей компенсаторов точечных считающих процессов.
Результаты исследования. Приведены и доказаны две теоремы, обосновывающие предложенную классификацию математических моделей продуктивных систем. Даны критерии принадлежности стохастической продуктивной системы классу «точно в срок». Доказана теорема о несовместности групп систем «точно в срок» и систем с бесконечным носителем распределения времени выполнения операций.
Обсуждение и заключение. Полученные результаты показывают целесообразность анализа стохастических продуктивных систем мартингальными методами. Описания в терминах интенсивностей компенсаторов продуктивных процессов допускают обобщения.

Ключевые слова: математическое моделирование, стохастическая продуктивная система, выполнение операций, система «точно в срок», мартингал, интенсивность, компенсатор

Для цитирования: Математическое моделирование основных классов стохастических продуктивных систем / А. А. Бутов [и др.] // Инженерные технологии и системы. 2019. Т. 29, № 4. С. 496–509. DOI: https://doi.org/10.15507/2658-4123.029.201904.496-509

Mathematical Modeling of Main Classes of Stochastic Productive Systems

A. A. Butov*, **M. A. Volkov, V. N. Golovanov, A. A. Kovalenko, B. M. Kostishko, L. M. Samoilov**
Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)
**butov.a.a@gmail.com*

Introduction. The article deals with mathematical models of two main classes of processes in stochastic productive systems. For a multistage system, conditions of belonging to a "just-in-time" class or a class with infinite support of the time distribution function for productive operations are determined.
Materials and Methods. Descriptions and investigations of models are carried out by trajectory (martingale) methods. For "just-in-time" systems and multistage stochastic productive systems, terms and methods of random walks in a random environment and birth and death processes are used. The results are formulated as descriptions of intensity characteristics of equalizers of point counting processes.
Results. Two theorems are given and proved; they justify the proposed classification of the mathematical models of productive systems. The criteria of the belonging of the stochastic productive system to the class "just-in-time" are given. A theorem on the incompatibility of groups of "just-in-time" systems and systems infinite support of the time distribution for operations is proved.
Discussion and Conclusion. The results show the feasibility of analyzing stochastic productive systems by martingale methods. The descriptions of terms of intensities of the equalizers time of productive processes admit generalization.

Keywords: mathematical modeling, stochastic productive system, performing operations, system "just-in-time", martingale, intensity, compensator

For citation: Butov A.A., Volkov M.A., Golovanov V.N., et al. Mathematical Modeling of Main Classes of Stochastic Productive Systems. *Inzhenernyye tekhnologii i sistemy* = Engineering Technologies and Systems. 2019; 29(4):496-509. DOI: https://doi.org/10.15507/2658-4123.029.201904.496-509

Введение

В настоящей работе предлагается метод описания стохастических продуктивных систем и соответствующих процессов выполнения операций в достаточно общих случаях. В современном промышленном производстве, как и при высокотехнологичной организации сельскохозяйственного производства, наблюдается определенная общность подходов и методов организации продуктивных процессов, обусловленная возможностями планирования. Методами построения формальных математических моделей обосновывается простая классификация стохастических продуктивных систем и соответствующих процессов выполнения операций в достаточно общих случаях.

В работе решается проблема построения и исследования математической модели стохастической (то есть подверженной случайным возмущениям) продуктивной системы. Важнейшим частным случаем таких объектов является система выполнения операций «точно в срок». Возникший первоначально для задач промышленного производства, этот метод организации жизненного цикла распространился в последнее десятилетие на методы программирования, обучения и тренировок, лечения и многое другое. При этом остаются неразработанными и неисследованными математические модели, отвечающие задачам оптимального управления, планирования оценивания параметров и уровней рисков. В задачах практической реализации таких систем ряд авторов создавал описания, сводящиеся к задачам логистики. Однако случайные возмущения (например, возврат «забракованных» операций разработки конструкторской документации на переработку, изменения в урожайностях или в скорости роста деревьев в лесоводстве, отклонения в интенсивностях выполнения операций и многое другое) авторы до настоящего времени пытались свести к простым аддитивным добавкам, как правило, с гауссовским законом распределения.

Темой исследования является построение в общих траекторных терминах такого математического описания, которое могло бы соответствовать принципу «точно в срок» и отклонениям от него. Также описание должно позволять разброс в интенсивности («скорости») выполнения операций с известными номерами и таким образом использовать метод случайной среды, которая и является набором этих интенсивностей. Описания, следовательно, должны опираться на разработанные авторами траекторные (известные также как мартингальные) методы построения моделей. Наряду с целью формирования модели, в работе необходимо решить следующие принципиальные задачи: определить условия, при которых система может являться «точно в срок» и решить задачу о возможности «совмещения» такого описания с моделью, не имеющей финитного носителя (когда с положительной вероятностью операции могут быть не выполнены за большое время). Эта последняя задача не является такой уж абстрактной, ведь, по существу, это иная формулировка проблемы о совместимости большинства теорий старения с теорией запрограммированной смерти.

Методы при построении и исследовании моделей использовались траекторные (мартингальные) в терминах точечных считающих процессов.

Обзор литературы

Анализу продуктивных систем посвящено большое количество работ. В последние годы возрастает роль моделирования и различных описаний систем, подвергающихся случайным возмущениям, то есть стохастическим системам, которым и посвящена настоящая работа. Необходимо это, прежде всего, для задач управления, прогнозирования и оценивания параметров таких систем.

Прежде всего необходимо отметить, что используемый здесь термин «продуктивная система» не является устоявшимся в русскоязычной научной литературе, посвященной вопросам моделирования. Это объясняется тем, что он восходит к широко используемым в англоязычных источниках двум близким терминам: *production system* и *productive system*. Первый из них – *production system* – используется преимущественно для рассмотрения систем производства (систем мануфактуры), конструирования, технологических процессов, инженерных систем. Следует отметить (в качестве примеров стохастического описания моделей) работы, которые выполнили С. Пань и Ш. Ли [1], а также А. Фазлирад и Т. Фрайхайт [2]. При этом термин *production system*, как правило, сочетается со словами *inventory* или *manufacturing*. Второй англоязычный термин – *productive system* – имеет более широкое применение. Так, он, включая перечисленные объекты моделирования, используется еще и при анализе вопросов эффективности, сельскохозяйственных систем, в лесоводстве, при анализе критических состояний систем. Ц. Чжэнь [3] и С. Гупта [4] провели исследования, которые стали примерами стохастических описаний соответствующих систем. Стоит заметить, что все сказанное выше так же относится и к популярному современному объекту научных исследований «точно в срок», прообразом которого служит англоязычный термин *just in time* (*just-in-time*).

Перед тем как обсудить методы выполнения операций в продуктивных системах, организованных по принципу «точно в срок», укажем, что приведенные здесь (а также иных моделях) случайные возмущения (стохастичность) рассматриваются как простые аддитивные (и, как правило, гауссовские) «добавки» к стандартным детерминистским описаниям. Такого рода описания доминируют, как хорошо известно, в анализе логистических задач (например, в транспортных задачах). Однако возмущения, присущие даже системам производства, не сводятся к логистическим проблемам. Продуктивные системы подвержены ограничениям на интенсивности выполнения операций, случайным явлениям возвращений на переработку и доработку, случайным отказам, стохастическим процедурам восстановления и многому другому. Также оказывается заведомо стохастическим описание прохождения многостадийных фаз жизненного цикла биологических объектов. Еще один подход, реализованный в упомянутых работах, сводится к описанию продуктивной системы как простой марковской цепи, что также далеко не всегда соответствует реальным объектам (и в силу отсутствия марковского свойства, и ввиду непрерывности времени выполнения операций).

Для того чтобы преодолеть указанные трудности моделирования, разрабатывались модели в траекторных терминах (называемых также мартингальными), в терминах точечных или считающих процессов. Необходимо отметить работу, выполненную А. А. Бутовым и А. А. Коваленко [5]. Эта работа построена на принципах, развитых А. А. Бутовым [6]. Упомянутые модели прохождения многостадийного жизненного цикла биологическими объектами разрабатывалось А. А. Бутовым в соавторстве с рядом ученых [7; 8].

Описание и математическое моделирование систем «точно в срок», являющихся важнейшим классом продуктивных систем, восходят к основополагающим (но не «математизированным» и не вероятностным) работам Й. Сугимори и других [9], а также М. Йаявуза и Э. Ачкали [10]. Наряду с инженерными, производственными и технологическими системами, организованными по принципу «точно в срок», в последние годы возникли системы обучения «точно в срок», представленные в работе С. Килли, Э. Моррисона [11], в сфере программирования – в работе Т. Папе, К. Ф. Больца, Р. Хиршфельда [12].

Отметим, что представленные в настоящей работе описания позволяют математически формализовать известную проблему – существует ли в системе биологических объектов программируемое прохождение стадий жизненного цикла в форме программируемого старения и программируемой смерти. Работы на эту тему, как правило, носят описательный характер и плохо поддаются математическому моделированию. Укажем лишь отдельные из них, посвященные рассуждениям о программируемой смерти – Б. Т. Вайнерт и П. С. Тимирас [13], Дж. Миттельдорф [14; 15], М. В. Благосклонный [16], А. Ковальд, Т. Б. Л. Кирквуд [17], Дж. Ван Раамсдонк [18]. При этом существенной особенностью рассматриваемых на основе терминологии процессов выполнения операций в продуктивной системе является многостадийность процессов, модели которой разработаны А. А. Бутовым и соавторами [19; 20]. Настоящая работа исходит из возможности описания многостадийных процессов выполнения операций в терминах случайных блужданий и процессов размножения и гибели, описанных в работах А. А. Бутова [6; 21], Л. С. Т. Хо [22] и П. Янга [23].

Материалы и методы

Рассмотрим модели продуктивных систем следующих двух типов:

(a) апериодического производства за ограниченное время;

(b) апериодического производства за время с неограниченным носителем функции распределения.

При этом как система (a), так и (b) могут допускать (I) циклическое производство, (II) непрерывное производство. Целью данной работы является обоснование выделения двух непересекающихся классов моделей: (a) и (b).

Математическим обоснованием данной классификации служат приведенные ниже теоремы. Представим формальное математическое описание стохастической модели выполнения операций. Работа выполнена в мартингальных терминах, траекторными методами.

Рассмотрим стохастический базис $\mathcal{B}=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P)$ (то есть вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},P)$, снабженное неубывающим непрерывным справа потоком σ-алгебр $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, пополненным по мере P [5; 6; 21; 24]). На $\mathcal{B}$ определим продуктивный процесс $X=(X_t)_{t\geq 0}$, заключающийся в выполнении конечного положительного и целого числа K операций. Траектории процесса X предполагаются регулярными (то есть непрерывными справа при $t \geq 0$ и имеющими предел слева при $t > 0$). В качестве процесса выполнения рассмотрим невозрастающий процесс случайного блуждания в случайной среде $\mathcal{E}=\left\{\left(\lambda_t(1)\right)_{t\geq 0},\ldots,\left(\lambda_t(K-1)\right)_{t\geq 0}\right\}$, где неотрицательные случайные функции $\lambda_t(i)$ являются $\mathcal{F}_0$-измеримыми при всех $i \geq 1$ и $t \geq 0$ [6]. Пусть случайная величина $X_t=X_t(\omega),\ \omega\in\Omega$, является числом еще не выполненных операций продуктивного процесса $\forall\, t\geq 0$. Тогда для процесса случайного блуждания (рассматриваемого в качестве модели выполнения K операций) справедливы соотношения: $X_t\in\{0,1,\ldots,K\}$ при $t\geq 0$, $X_0=K\in\{1,2,\ldots\}$ и $\Delta X_t=X_t-X_{t-}\in\{-1,0\}$ при $t>0$ (где $X_{t-}=\lim\limits_{s\to t-0} X_s$). Процесс выполнения может быть представлен в виде:

$$X_t=K-A_t, \tag{1}$$

где $A_0=0$ и неубывающий процесс $A=(A_t)_{t\geq 0}$ равен $A_t=\sum\limits_{0<s\leq t} I\{\Delta X_s=-1\}$, где $I\{\cdot\}$ – индикаторная функция, то есть $I\{true\}=1$, $I\{false\}=0$. При последовательном выполнении процесс A является точечным считающим процессом и, следовательно, скачкообразным неубывающим субмартингалом со скачками $\Delta A_t\in\{0,I(1\leq X_{t-})\}$. Следовательно, в разложении Дуба – Мейера для компенсатора $\tilde{A}$ [6; 24] справедливо равенство:

$$\tilde{A}_t=\int_0^t a_s\cdot I\{1\leq X_s\}ds, \tag{2}$$

где интенсивность скачков $a_t\geq 0$ определяется случайной средой $\mathcal{E}$:

$$a_t=\sum_{i=1}^{K}\lambda_t(i)\cdot I\{X_t=i\}. \tag{3}$$

На базисе $\mathcal{B}$ для каждого последовательного номера $i\in\{K,K-1,\ldots,1\}$ марковский момент $\tau(i)$ является временем начала выполнения i-й операции: $\tau(K)=0$ и для $i\in\{K-1,\ldots,1\}$:

$$\tau(i)=\inf\{t>\tau(i+1):\ X_t=i\}. \tag{4}$$

Момент завершения всего продуктивного процесса $\tau(0)$ (несоответствующий началу выполнения операции) определяется аналогично:

$$\tau(0)=\inf\{t>\tau(1):\ X_t=0\}. \tag{5}$$

Для момента $\tau(0)$ также имеет место равенство $\tau(0)=\inf\{t>0:\ X_t=0\}$.

Для марковских моментов $\tau(i)$ P – почти наверное (то есть с единичной вероятностью) справедливы неравенства:

$$\tau(K)<\tau(K-1)<\cdots<\tau(1)<\tau(0). \quad (6)$$

Если $P\{\tau(0)<\infty\}=1$, то процесс выполнения конечен. Тогда $\tau(i)$ – моменты остановки на $\mathcal{B}$. В этом случае при всех $x\in(-\infty,\infty)$ определена функция распределения $F_{\tau(0)}(x)=P\{\tau(0)\le x\}$ и для всех $i\in\{K,\ldots,1\}$ – условные функции распределения $F^{(i)}_{\tau(i-1)}(x)=P\left\{\tau(i-1)\le x\,|\,\mathcal{F}_{\tau(i)}\right\}$. Из (6) следует, что P – почти наверное для всех $i\in\{K,\ldots,1\}$ выполняются равенства:

$$F_{\tau(0)}(0)=F^{(i)}_{\tau(i-1)}(\tau(i))=0. \quad (7)$$

Заметим, что в случае $K>1$, $F_{\tau(0)}(x)$ не совпадает со случайной функцией $F^{(1)}_{\tau(0)}(x)$, поскольку $F^{(1)}_{\tau(0)}(x)=0$ при $x\le\tau(1)$.

Определение

Конечный процесс выполнения $X=(X_t)_{t\ge0}$ называется «точно в срок» (или процесс «точно в срок *T*»), если существует такое число $T\in(0,\infty)$, что:

$$P\{\tau(0)\le T\}=1 \text{ и } P\{\tau(0)>T-\varepsilon\}>0 \quad \forall\,\varepsilon>0. \quad (8)$$

В модели мы предполагаем, что распределение процесса X определяется случайной средой $\mathcal{E}$. Следовательно, случайные функции и $F^{(i)}_{\tau(i-1)}(x)$ при всех $i\in\{K,\ldots,1\}$ и функция распределения $F_{\tau(0)}(x)$ абсолютно непрерывны, то есть существуют плотности распределения моментов. Наряду с процессом X в модели рассмотрим вспомогательный процесс одного скачка $N=(N_t)_{t\ge0}$ с $N_t=I\{X_t\ge1\}=I\{t<\tau(0)\}$. Разложения Дуба – Мейера для N на стохастическом базисе $\mathcal{B}^N=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}^N=(\mathcal{F}^N_t)_{t\ge0},P)$ (с $\mathcal{F}^N_t=\sigma(N_s;s\le t)$) по теореме Деллашери [24] имеют вид:

$$N_t=1-\int_0^t N_s\cdot\mu_s ds+m^N_t, \quad (9)$$

где

$$\mu_t=dF_{\tau(0)}(t)/dt \Big/ (1-F_{\tau(0)}(t)), \quad (10)$$

а $(m^N_t)_{t\ge0}$ – квадратично интегрируемый мартингал.

Результаты исследования

Предложение

Условие (8) «точно в срок *T*» для процесса X эквивалентно (11):

$$\int_0^t \mu_s ds<\infty \text{ при } t<T, \text{ и } \int_0^T \mu_s ds=\infty. \quad (11)$$

Доказательство

Как следует из (7) и (10), $\int_0^t \mu_s ds=\log\left(1-F_{\tau(0)}(t)\right)$, что и доказывает (8).

Предложение доказано

Обозначим $\varphi_t(i)=\int_0^t \lambda_s(i)ds$ и $\Phi(t)=\min_{1\le i\le K}\{\varphi_t(i)\}$ при $\Phi(t)=\min_{1\le i\le K}\{\varphi_t(i)\}$.

Модель с финитным носителем процессов выполнения операций в случайной среде

Теорема 1 (критерий «точно в срок»)

Процесс X в случайной среде $\mathcal{E}$ является «точно в срок *T*» тогда и только тогда, когда P – почти наверное выполняются условия (12) и (13):

$$\Phi(t)<\infty \text{ при } t<T, \quad (12)$$

$$\Phi(T)=\infty. \quad (13)$$

Доказательство

Аналогично $N=(N_t)_{t\ge0}$ рассмотрим для всех номеров $i\in\{K,\ldots,1\}$ вспомогательные процессы $N(i)=$

$=(N_t(i))_{t\geq 0}$ с $N_t(i)=I\{X_t\geq i\}=I\{t<\tau(i-1)$ на стохастических базисах $\overline{\mathcal{B}}^{(i)}=$ $=(\Omega,\mathcal{F},\overline{\mathcal{F}}^{(i)}=(\overline{\mathcal{F}}_t^{(i)})_{t\geq 0},P)$ с $\overline{\mathcal{F}}_t^{(i)}=$ $=\sigma\left\{\tau(i),\left(N_s(i);\, s\leq t\right)\right\}$. Разложения Дуба – Мейера процессов $N(i)$ на $\overline{\mathcal{B}}^{(i)}$ имеют вид:

$$N_t(i)=1-\int_0^t N_s(i)\cdot\bar{\mu}_s(i)ds+m_t^{N(i)}, \quad (14)$$

где при всех $i\in\{K,\dots,1\}$:

$$\bar{\mu}_t(i)=\left. dF_{\tau(i-1)}^{(i)}(t)/dt \middle/ (1-F_{\tau(i-1)}^{(i)}(t)) \right.,$$

а $(m_t^{N(i)})_{t\geq 0}$ – соответствующие квадратично интегрируемые мартингалы. Отметим, что в случае $K>1$, $\mathcal{B}^N \uparrow \overline{\mathcal{B}}^{(1)}$, поскольку $\mathcal{F}_t^N \uparrow \overline{\mathcal{F}}_t^{(1)}$. Поэтому $\mu_t\neq\bar{\mu}_t(1)$. Из (1), (2), (3) и (12) получаем, что при всех $i\in\{K,\dots,1\}$:

$$\bar{\mu}_t(i)=\lambda_t(i)\cdot I\{X_t=i\}. \quad (15)$$

Покажем достаточность условий теоремы. Из (6) и (13) следует, что для каждого номера $i\in\{K,\dots,1\}$ P – почти наверное выполняется соотношение

$$\lim_{t\to T}\left\{\varphi_t(i)-\varphi_{\tau(i)}(i)\right\}=\infty. \quad (16)$$

Пусть $\nu_t(i)=\mathrm{E}\left\{N_t(i)\,|\,\mathcal{F}_{\tau(i)}\right\}$ – условное математическое ожидание $N_t(i)$. Тогда из (14) и (15) следует, что при $t\leq\tau(i)$ $\nu_t(i)=1$ и при $t\in(\tau(i),T)$:

$$\nu_t(i)=1-\int_{\tau(i)}^t \nu_s(i)\cdot\lambda_s(i)ds. \quad (17)$$

Решением (17) является случайный процесс:

$$\nu_t(i)=I\{t>\tau(i)\}\cdot\exp\left\{-(\varphi_t(i)-\varphi_{\tau(i)}(i))\right\}. \quad (18)$$

Из чего следует, что $\nu_T(i)=$ $=\lim_{t\to T}\exp\left\{-(\varphi_t(i)-\varphi_{\tau(i)}(i))\right\}$ P – почти наверное. Из (16) получаем, что для всех $i\in\{K,\dots,1\}$ $\nu_T(i)=0$ P – почти наверное, откуда и получаем, что $P\{X_T\geq 1\}=P\{N_T\geq 1\}=N_T=\mathrm{E}\left\{N_T(1)\right\}=0$. Из (6), (12) и (18) также получаем, что $N_t>0$ при любых $t<T$. Достаточность доказана. Покажем необходимость условий теоремы. Условие (12) очевидно необходимо (в противном случае из (18) следовало бы, что $P\{X_u=0\}=I\{true\}=1$ при каком-то значении $u<T$). Доказательство необходимости (13) проводится от противного. Определим для каждого номера $i\in\{K,\dots,1\}$ и для каждого числа $n\geq 1$ множество $\Gamma^n(i)=\left\{\omega\in\Omega:\int_0^T\lambda_s(i)ds\leq n\right\}$. Заметим, что $\Gamma^n(i)\in\mathcal{F}_0$. Если (13) не выполнено, то существуют такой номер $i\in\{K,\dots,1\}$ и конечное число n, что $P\{\Gamma^n(i)\}>0$. Рассмотрим процесс $\bar{X}=(\bar{X}_t)_{t\geq 0}$ с $\bar{X}_t=X_t\cdot I\{\Gamma^n(i)\}$, а также $x_t=\mathrm{E}\left\{X_t\,|\,\mathcal{F}_{\tau(i)}\right\}$. Из (18) получаем, что $x_T(i)=$ $=i\cdot I\{\Gamma^n(i)\}\cdot\lim_{t\to T}\exp\left\{-(\varphi_t(i)-\varphi_{\tau(i)}(i))\right\}\geq$ $\geq I\{\Gamma^n(i)\}\cdot\exp\left\{-n\right\}>0$, что противоречит (8), поскольку на множестве $\Gamma^n(i)$ значения X_T и $\bar{X}_T$ совпадают. *Теорема доказана.*

Несовместность моделей

Рассмотрим семейство моделей с процессами выполнения операций $X(T)=(X_t(T))_{t\geq 0}$ «точно в срок T». Пусть время $T=T(\omega),\omega\in\Omega$, является строго положительной $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величиной. Возникает вопрос, существует ли такое распределение моментов времени T, с некоторой плотностью $\rho(t)=\rho_T(t)$, $t\geq 0$, что результирующая модель соответствует процессу с плотностью вероятности моментов завершения выполнения операций, обладающей бесконечным носителем (а не финитным, как в случае с «точно в срок»)? Например, могут ли моменты смерти в гипотезе программируемой смерти быть так распределены, чтобы результирующая кривая дожития соответствовала схеме Гомпертца или ее аналогам? В рассмотрении мы предполагаем, что определяемая в (10) функция $\mu_t = \mu_t(T)$ отвечает «точно в срок T». Не ограничивая общности мы предполагаем, что переходная функция – плотность вероятности $\rho(t)$ – является гладкой функцией. Заметим, что результирующему процессу $X(T)$ соответствуют момент завершения $\varsigma(0)=\inf\{t>0: X_t(T)=0\}$ аналогично $\tau(0)$ в схеме (4) – (5). Для него определим процесс одного скачка $N(T)=(N_t(T))_{t\geq 0}$ с $N_t=I\{X_t(T)\geq 1\}=$ $=I\{t<\varsigma(0)\}$. Разложения Дуба – Мейера для $N(T)$ на стохастическом базисе $\mathcal{B}^{N(T)}=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}^{N(T)}=(\mathcal{F}_t^{N(T)})_{t\geq 0},P)$ (с $\mathcal{F}_t^{N(T)}=\sigma(N_s(T); s\leq t)$) аналогично (9) – (10):

$$N_t(T)=1-\int_0^t N_s(T)\cdot h_s ds+\bar{m}_t^{N(T)},$$

$$h_t=\frac{dF_{\varsigma(0)}(t)/dt}{(1-F_{\varsigma(0)}(t))},$$

а $(\bar{m}_t^{N(T)})_{t\geq 0}$ – квадратично интегрируемый мартингал на $\mathcal{B}^{N(T)}$. Таким образом, задача сводится к вопросу о существовании $\rho(t)$ такой, что конечная функция h_t интегрируема на любом конечном интервале.

Теорема 2 (о несовместности моделей)

Не существует гладкой функции плотности $\rho(t)$ с финитным носителем такой, чтобы функция h_t была интегрируема на любом конечном интервале $[0,u]$ с $0<u<\infty$.

Доказательство

Покажем справедливость утверждения от противного. Пусть при любом значении s, $s>0$ момента $T=T(\omega), \omega\in\Omega$, модель отвечает условию (8) «точно в срок s». Следовательно, выполняются соотношения (11) $\forall s, s>0$:

$$\int_0^s \mu_t(s)dt=\infty. \qquad (19)$$

Из того, что функция плотности распределения $\rho(s)$ гладкая, следует, что существуют числа r и u такие, что $0\leq r<u<\infty$ и для некоторого $\varepsilon>0$ выполняется $\rho(s)\geq\varepsilon$ при всех $s\in[r,u]$. Тогда:

$$h_t=\int_0^\infty \rho(s)\cdot\mu_t(s)ds\geq\varepsilon\cdot\int_r^u \mu_t(s)\cdot I\{t<s\}ds. \qquad (20)$$

Из (20) следует, что при любом $u>0$,

$$\int_0^u h_t dt\geq\int_0^u\left(\int_r^u \varepsilon\cdot\mu_t(s)\cdot I\{t<s\}ds\right)dt=$$

$$=\int_0^u\int_0^u \varepsilon\cdot I\{r<s\}\cdot\mu_t(s)\cdot I\{t<s\}dsdt.$$

Меняем порядок интегрирования и получаем из (19) неравенство:

$$\int_0^u h_t dt\geq\varepsilon\cdot\int_r^u\left(\int_0^u I\{t<s\}\cdot\mu_t(s)dt\right)ds=$$

$$=\varepsilon\cdot\int_r^u\left(\int_0^s \mu_t(s)dt\right)ds=\infty,$$

что противоречит предположению об интегрируемости h_t на $[0, u]$.

Теорема доказана

Обсуждение и заключение

В работе дано общее определение систем «точно в срок» общего вида. В *Предложении* и *Теореме 1* сформулированы условия принадлежности продуктивных систем классу «точно в срок». Как показано в *Теореме 2*, модели таких систем оказываются в определенном смысле несовместными с моделями систем с бесконечными носителями распределения моментов завершения процессов выполнения операций. В частности, модели для процессов с заведомо сезонным режимом выполнения (например, в зерноводстве) несовместимы с моделями с потенциально сколько угодно долго живущими объектами (например, в лесоводстве). Заметим, что также несовместны модели программируемого старения в геронтологии с моделями износа (например, Гомпертца – Мейкхама).

Предлагаемый метод математического описания и исследования достаточно легко может быть распространен на общий случай процессов случайного блуждания в случайной среде (в том числе для процессов размножения и гибели).

В ряде случаев также целесообразно рассматривать $X=(X_t)_{t\ge 0}$ как процесс размножения и гибели в детерминированной среде [21–23]. Для процесса выполнения значения $X_t \in \{0,1,2\ldots\}$ при $t \ge 0$ $X_0 = K \in \{1, 2, \ldots\}$ и $\Delta X_t = X_t - X_{t-} \in \{-1, 0, 1\}$ при $t > 0$. Тогда, вместо (1) имеем:

$$X_t = K - A_t + B_t, \tag{21}$$

где $A_0 = B_0 = 0$ и неубывающие процессы $A=(A_t)_{t\ge 0}$ и $B=(B_t)_{t\ge 0}$ равны $A_t = \sum\limits_{0<s\le t} I\{\Delta X_s = -1\}\cdot I\{X_{s-}\ge 1\}$ и $B_t = \sum\limits_{0<s\le t} I\{\Delta X_s = 1\}$. Компенсаторы субмартингалов A и B, аналогично (2), представим как:

$$\tilde{A}_t = \int\limits_0^t a_s \cdot I\{1 \le X_s\} ds, \; \tilde{B}_t = \int\limits_0^t b_s \cdot I\{1 \le X_s\} ds. \tag{22}$$

Интенсивности скачков $a_t \ge 0$ и $b_t \ge 0$ для процессов размножения и гибели в общем детерминированном случае определяются равенствами (27):

$$a_s = \alpha(s)\cdot X_s + \eta(s)\cdot I\{1 \le X_s\}, \tag{23}$$

$$b_s = \beta(s)\cdot X_s + \gamma(s)\cdot I\{1 \le X_s\}. \tag{24}$$

Тогда выполнение (8) в требовании «точно в срок *T*» определяется решением уравнения (29) для математического ожидания $R_t(i) = \mathrm{E}\{X_t\}$:

$$R_t = K + \int\limits_0^t (\beta_s - \alpha_s)\cdot R_s ds + \int\limits_0^t (\gamma_s - \eta_s)\cdot P\{1 \le X_s\} ds. \tag{25}$$

При этом, как следует из *Предложения* и *Теоремы 1*, даже в скалярном случае функция α_s (а также в отдельных случаях β_s) не интегрируема. Для (21), (22), (23) и (24), как и для уравнения (25), естественно, актуальны многомерные обобщения, что представимо в форме линейного операторного уравнения (см. [25]). Определение условий существования и единственности неотрицательного решения линейного интегрального уравнения в настоящее время остается актуальной задачей, поскольку представления условий в терминах собственных значений операторов в соответствующих Банаховых пространствах [25] даже в простых (в том числе скалярных) случаях характеризуют траекторное поведение функций $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ и η_s опосредованно.

Полезными и интересными представляются дальнейшие исследования и для управляемых продуктивных систем, в том числе для управляемых процессов случайного блуждания.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Pan X., Li Sh.** Optimal Control of a Stochastic Production–Inventory System under Deteriorating Items and Environmental Constraints // International Journal of Production Research. 2015. Vol. 53, Issue 2. Pp. 607–628. DOI: https://doi.org/10.1080/00207543.2014.961201

2. **Fazlirad A., Freiheit T.** Application of Model Predictive Control to Control Transient Behavior in Stochastic Manufacturing System Models // Journal of Manufacturing Science and Engineering. 2016. Vol. 138, Issue 8. Article 081007. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4031497

3. Stochastic Frontier Analysis of Productive Efficiency in China's Forestry Industry / J. Chen [et al.] // Journal of Forest Economics. 2017. Vol. 28, Issue 1. Pp. 87–95. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfe.2017.05.005

4. **Gupta S.** Stochastic Modelling and Availability Analysis of a Critical Engineering System // International Journal of Quality & Reliability Management. 2019. Vol. 36, Issue 5. Pp. 782–796. DOI: https://doi.org/10.1108/IJQRM-07-2018-0167

5. **Butov A. A., Kovalenko A. A.** Stochastic Models of Simple Controlled Systems Just-in-Time // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2018. Vol. 22, no. 3. Pp. 518–531. DOI: http://doi.org/10.14498/vsgtu1633

6. **Butov A. A.** Random Walks in Random Environments of a General Type // Stochastics and Stochastics Reports. 1994. Vol. 48, Issue 3–4. Pp. 145–160. DOI: https://doi.org/10.1080/17442509408833904

7. **Бутов А. А., Шабалин А. С., Коваленко А. А.** Математическая модель многостадийного старения адаптивных систем // Фундаментальные исследования. 2015. № 9. С. 219–222. URL: http://www.fundamental-research.ru/pdf/2015/9-2/39077.pdf (дата обращения: 06.11.2019).

8. **Бутов А. А., Шабалин А. С., Чибрикова Т. С.** Математическая модель многостадийного старения с восстановлением // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн. 2018. № 1. С. 34–37. URL: https://www.ulsu.ru/media/uploads/anako09%40mail.ru/2018/06/13/ButovAA_ShabalinAS_ChibrikovaTS.pdf (дата обращения: 06.11.2019).

9. **Sugimori Y., Kusunoki K., Cho F., Uchikawa S.** Toyota Production System and Kanban System Materialization of Just-in-Time and Respect-for-Human System // International Journal of Production Research. 1977. Vol. 15, Issue 6. Pp. 553–564. DOI: https://doi.org/10.1080/00207547708943149

10. **Yavuz M., Akcali E.** Production Smoothing in Just-in-Time Manufacturing Systems: A Review of the Models and Solution Approaches // International Journal of Production Research. 2007. Vol. 45, Issue 16. Pp. 3579–3597. DOI: https://doi.org/10.1080/00207540701223410

11. **Killi S., Morrison A.** Just-in-time Teaching, Just-in-Need Learning: Designing towards Optimized Pedagogical Outcomes // Universal Journal of Educational Research. 2015. Vol. 3, Issue 10. Pp. 742–750. DOI: https://doi.org/10.13189/ujer.2015.031013

12. **Pape T., Bolz C. F., Hirschfeld R.** Adaptive Just-in-Time Value Class Optimization for Lowering Memory Consumption and Improving Execution Time Performance // Science of Computer Programming. 2017. Vol. 140. Pp. 17–29. DOI: https://doi.org/10.1016/j.scico.2016.08.003

13. **Weinert B. T., Timiras P. S.** Invited Review: Theories of Aging // Journal of Applied Physiology. 2003. Vol. 95, Issue 4. Pp. 1706–1716. DOI: https://doi.org/10.1152/japplphysiol.00288.2003

14. **Mitteldorf J.** Programmed and Non-Programmed Theories of Aging // Russian Journal of General Chemistry. 2010. Vol. 80, no. 7. Pp. 1465–1475. DOI: https://doi.org/10.1134/S107036321007042X

15. **Mitteldorf J.** Can Aging Be Programmed? // Biochemistry (Moscow). 2018. Vol. 83, no. 12. Pp. 1524–1533. DOI: https://doi.org/10.1134/S0006297918120106

16. **Blagosklonny M. V.** Aging Is not Programmed Genetic Pseudo-Program Is a Shadow of Developmental Growth // Cell Cycle. 2013. Vol. 12, Issue 24. Pp. 3736–3742. DOI: https://doi.org/10.4161/cc.27188

17. **Kowald A., Kirkwood T. B. L.** Can Aging Be Programmed? A Critical Literature Review // Aging Cell. 2016. Vol. 15, Issue 6. Pp. 986–998. DOI: https://doi.org/10.1111/acel.12510

18. **Van Raamsdonk J. M.** Mechanisms Underlying Longevity: A Genetic Switch Model of Aging // Experimental Gerontology. 2018. Vol. 107. Pp. 136–139. DOI: https://doi.org/10.1016/j.exger.2017.08.005

19. **Butov A. A., Shabalin A. S.** Stochastic Simulation Model for Matching the Ages of Laboratory Animals (Mammals) and Humans // Advances in Gerontology. 2016. Vol. 6, Issue 2. Pp. 88–90. DOI: https://doi.org/10.1134/S2079057016020028

20. **Бутов А. А., Коваленко А. А., Шабалин А. С.** Математическая модель изменений в компенсации износа при старении // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2018. № 4. С. 14–17. URL: https://applied-research.ru/pdf/2018/4/12175.pdf (дата обращения: 06.11.2019)

21. **Butov A. A.** On the Problem of Optimal Instant Observations of the Linear Birth and Death Process // Statistics and Probability Letters. 2015. Vol. 101. Pp. 49–53. DOI: https://doi.org/10.1016/j.spl.2015.02.021

22. Birth/Birth-Death Processes and Their Computable Transition Probabilities with Biological Applications / L. S. T. Ho [et al.] // Journal of Mathematical Biology. 2018. Vol. 76, Issue 4. Pp. 911–944. DOI: https://doi.org/10.1007/s00285-017-1160-3

23. A Birth and Death Process Model with Blocking Growth and Its Numerical Simulation Research / P. Yang [et al.] // Advances in Intelligent Systems Research (AISR). Proceedings of 3rd International Conference on Modelling, Simulation and Applied Mathematics (MSAM 2018). 2018. Vol. 160. Pp. 16–19. DOI: https://doi.org/10.2991/msam-18.2018.4

24. **Dellacherie C.** Capacites et Processus Stochastiques. Berlin, Heidelberg: Springer, 1972. 155 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-59107-9

25. **Jang R.-J., Victory Jr H. D.** On Nonnegative Solvability of Linear Integral Equations // Linear Algebra and its Applications. 1992. Vol. 165. Pp. 197–228. DOI: https://doi.org/10.1016/0024-3795(92)90238-6

Поступила 01.08.2019; принята к публикации 15.10.2019; опубликована онлайн 31.12.2019

Об авторах:

Бутов Александр Александрович, заведующий кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), доктор физико-математических наук, профессор, ResearcherID: E-4654-2014, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8322-9892, butov.a.a@gmail.com

Волков Максим Анатольевич, декан факультета математики, информационных и авиационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), кандидат физико-математических наук, доцент, ResearcherID: A-9869-2019, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5780-5155, volkovmax1977@gmail.com

Голованов Виктор Николаевич, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), доктор физико-математических наук, профессор, PublonsID: https://publons.com/researcher/2927643/viktor-golovanov/, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5023-4727, golovanov_vn@mail.ru

Коваленко Анатолий Александрович, аспирант кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), ResearcherID: N-5877-2019, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3820-9785, anako09@mail.ru

Костишко Борис Михайлович, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), доктор физико-математических наук, профессор, ResearcherID: J-8125-2014, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0041-2753, kost@ulsu.ru

Самойлов Леонид Михайлович, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), доктор физико-математических наук, доцент, ResearcherID: N-6040-2019, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8464-4628, samoilov_l@rambler.ru

Заявленный вклад соавторов:

А. А. Бутов – математическое описание моделей, формулирование выводов; М. А. Волков – анализ научных источников по теме исследования, анализ и доработка текста; В. Н. Голованов – формулирование задач, анализ методов исследования; А. А. Коваленко – проведение математических исследований, доработка и верстка текста; Б. М. Костишко – формулирование основной концепции исследования, обсуждение результатов; Л. М. Самойлов – анализ детерминистских алгебраических методов исследования.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

REFERENCES

1. Pan X., Li Sh. Optimal Control of a Stochastic Production–Inventory System under Deteriorating Items and Environmental Constraints. *International Journal of Production Research*. 2015; 53(2):607-628. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1080/00207543.2014.961201

2. Fazlirad A., Freiheit T. Application of Model Predictive Control to Control Transient Behavior in Stochastic Manufacturing System Models. *Journal of Manufacturing Science and Engineering.* 2016; 138(8):081007. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1115/1.4031497

3. Chen J., Wu Y., Song M., et al. Stochastic Frontier Analysis of Productive Efficiency in China's Forestry Industry. *Journal of Forest Economics*. 2017; 28(1):87-95. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfe.2017.05.005

4. Gupta S. Stochastic Modelling and Availability Analysis of a Critical Engineering System. *International Journal of Quality & Reliability Management.* 2019; 36(5):782-796. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1108/IJQRM-07-2018-0167

5. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic Models of Simple Controlled Systems Just-in-Time. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta. Seriya “Fiziko-matematicheskie nauki”* = Journal of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences. 2018; 22(3):518-531. (In Eng.) DOI: http://doi.org/10.14498/vsgtu1633

6. Butov A.A. Random Walks in Random Environments of a General Type. *Stochastics and Stochastics Reports.* 1994; 48(3-4):145-160. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1080/17442509408833904

7. Butov A.A., Shabalin A.S., Kovalenko A.A. Mathematical Model of Multistage Aging in Adaptive Systems. *Fundamentalnyie issledovaniya* = Fundamental Research. 2015; (9):219-222. Available at: http://www.fundamental-research.ru/pdf/2015/9-2/39077.pdf (accessed 06.11.2019). (In Russ.)

8. Butov A.A., Shabalin A.S., Chibrikova T.S. The Mathematical Model of Multi-Stage Aging with Recovery. *Uchenyie zapiski UlGU. Ser. Matematika i informatsionnyie tehnologii. UlGU* = Scientists Notes of the Ulyanovsk State University. Series: Mathematics and Information Technologies. 2018; (1):34-37. Available at: https://www.ulsu.ru/media/uploads/anako09%40mail.ru/2018/06/13/ButovAA_ShabalinAS_ChibrikovaTS.pdf (accessed 06.11.2019). (In Russ.)

9. Sugimori Y., Kusunoki K., Cho F., Uchikawa S. Toyota Production System and Kanban System Materialization of Just-in-Time and Respect-for-Human System. *International Journal of Production Research*. 1977; 15(6):553-564. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1080/00207547708943149

10. Yavuz M., Akcali E. Production Smoothing in Just-in-Time Manufacturing Systems: A Review of the Models and Solution Approaches. *International Journal of Production Research.* 2007; 45(16):3579-3597. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1080/00207540701223410

11. Killi S., Morrison A. Just-in-Time Teaching, Just-in-Need Learning: Designing towards Optimized Pedagogical Outcomes. *Universal Journal of Educational Research.* 2015; 3(10):742-750. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.13189/ujer.2015.031013

12. Pape T., Bolz C.F., Hirschfeld R. Adaptive Just-in-Time Value Class Optimization for Lowering Memory Consumption and Improving Execution Time Performance. *Science of Computer Programming*. 2017; 140:17-29. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.scico.2016.08.003

13. Weinert B.T., Timiras P.S. Invited Review: Theories of Aging. *Journal of Applied Physiology.* 2003; 95(4):1706-1716. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1152/japplphysiol.00288.2003

14. Mitteldorf J. Programmed and Non-Programmed Theories of Aging. *Russian Journal of General Chemistry*. 2010; 80(7):1465-1475. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1134/S107036321007042X

15. Mitteldorf J. Can Aging Be Programmed? *Biochemistry (Moscow).* 2018; 83(12):1524-1533. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1134/S0006297918120106

16. Blagosklonny M.V. Aging Is not Programmed Genetic Pseudo-Program Is a Shadow of Developmental Growth. *Cell Cycle.* 2013; 12(24):3736-3742. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.4161/cc.27188

17. Kowald A., Kirkwood T.B.L. Can Aging Be Programmed? A Critical Literature Review. *Aging Cell*. 2016; 15(6):986-998. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1111/acel.12510

18. Van Raamsdonk J.M. Mechanisms Underlying Longevity: A Genetic Switch Model of Aging. *Experimental Gerontology*. 2018; 107:136-139. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.exger.2017.08.005

19. Butov A.A., Shabalin A.S. Stochastic Simulation Model for Matching the Ages of Laboratory Animals (Mammals) and Humans. *Advances in Gerontology.* 2016; 6(2):88-90. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1134/S2079057016020028

20. Butov A.A., Kovalenko A.A., Shabalin A.S. Mathematical Model of Changes in the Wear of Aging. *Mezhdunarodnyiy zhurnal prikladnyih i fundamentalnyih issledovaniy* = International Journal of Applied and Fundamental Research. 2018; (4):14-17. Available at: https://applied-research.ru/pdf/2018/4/12175.pdf (accessed 06.11.2019). (In Russ.)

21. Butov A.A. On the Problem of Optimal Instant Observations of the Linear Birth and Death Processes. *Statistics and Probability Letters.* 2015; 101:49-53. DOI: https://doi.org/10.1016/j.spl.2015.02.021

22. Ho L.S.T., Xu J., Crawford F.W., et al. Birth/Birth-Death Processes and Their Computable Transition Probabilities with Biological Applications. *Journal of Mathematical Biology.* 2018; 76(4):911-944. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/s00285-017-1160-3

23. Yang P., Liu H., W. Yumei, et al. A Birth and Death Process Model with Blocking Growth and Its Numerical Simulation Research. *Advances in Intelligent Systems Research (AISR).* Proceedings of 3rd International Conference on Modelling, Simulation and Applied Mathematics (MSAM 2018). 2018; 160:16-19. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.2991/msam-18.2018.4

24. Dellacherie C. Capacites et Processus Stochastiques. Berlin, Heidelberg: Springer; 1972. 155 p. (In Fr.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-59107-9

25. Jang R.-J., Victory Jr H.D. On Nonnegative Solvability of Linear Integral Equations. *Linear Algebra and its Applications*. 1992; 165:197-228. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/0024-3795(92)90238-6

Received 01.08.2019; revised 15.10.2019; published online 31.12.2019

About the authors:

Alexander A. Butov, Head of Chair of Applied Mathematics, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), Professor, ResearcherID: E-4654-2014, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8322-9892, butov.a.a@gmail.com

Maxim A. Volkov, Dean of Faculty of Mathematics, Information and Aviation Technology, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, ResearcherID: A-9869-2019, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5780-5155, volkovmax1977@gmail.com

Viktor N. Golovanov, Vice Rector for Research, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), Professor, PublonsID: https://publons.com/researcher/2927643/viktor-golovanov/, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5023-4727, golovanov_vn@mail.ru

Anatoly A. Kovalenko, Postgraduate Student of Chair of Applied Mathematics, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), ResearcherID: N-5877-2019, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3820-9785, anako09@mail.ru

Boris M. Kostishko, Rector of Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), Professor, ResearcherID: J-8125-2014, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0041-2753, kost@ulsu.ru

Leonid M. Samoilov, Professor of Chair of Applied Mathematics, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, ResearcherID: N-6040-2019, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8464-4628, samoilov_l@rambler.ru

Contribution of the authors:

A. A. Butov – mathematical descriptions of the models, drawing the conclusions; M. A. Volkov – reviewing the relevant literature, analyzing and finalizing the text; V. N. Golovanov – formulation of the problems, analysis of research methodology; A. A. Kovalenko – mathematical investigations, word processing, editing the text; B. M. Kostishko – formulation of the basic concept of investigations, discussion of the results; L. M. Samoilov – analysis of algebraic deterministic methods of investigations.

All authors have read and approved the final manuscript.