http://vestnik.mrsu.ru ISSN Print 0236-2910
ISSN Online 2313-0636

УДК 517.9 DOI: 10.15507/0236-2910.027.201704.546-554

Асимптотическая устойчивость однородных сингулярных систем

М. В. Козлов*, В. Н. Щенников
ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия)
**kozlov.mvl@yandex.ru*

Введение. В статье исследуются сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с однородной правой частью рациональной степени. Предметом исследования является асимптотическая устойчивость нулевого решения указанных систем при достаточно малых значениях параметра.
Материалы и методы. В качестве основного приема исследования применяется декомпозиция возмущенной системы на редуцированную и пограничную системы меньшей размерности. Для анализа устойчивости используются теоремы В. И. Зубова об устойчивости однородных систем, относящиеся ко второму методу Ляпунова.
Результаты исследования. В ходе работы получены условия, при выполнении которых асимптотическая устойчивость нулевого решения сингулярно возмущенной системы является следствием аналогичного свойства редуцированной и пограничной систем. Данный вывод справедлив при достаточно малых значениях возмущающего параметра. Для проверки условия теоремы требуется построение однородных функций Ляпунова.
Обсуждение и заключения. В статье приведен числовой пример, показывающий, что класс систем, удовлетворяющих полученной теореме, не является пустым. Получена оценка верхней границы изменения малого параметра, в рамках которой нулевое решение будет гарантированно асимптотически устойчиво.

Ключевые слова: сингулярность, малый параметр, устойчивость, декомпозиция, однородная функция

Для цитирования: Козлов М. В., Щенников В. Н. Асимптотическая устойчивость однородных сингулярных систем // Вестник Мордовского университета. 2017. Т. 27, № 4. С. 546–554. DOI: 10.15507/0236-2910.027.201704.546-554

Asymptotic Stability of Homogeneous Singular Systems

M. V. Kozlov*, V. N. Shchennikov
National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)
**kozlov.mvl@yandex.ru*

Introduction. The paper provides an overview of singularly perturbed systems of ordinary differential equations with a homogeneous right-hand side of rational degree. The subject of the study is the asymptotic stability of the zero solution of these systems for sufficiently small values of the parameter.
Materials and Methods. Decomposition of the perturbed system into a reduced and a boundary system of smaller dimension is used as the main method of investigation.

For the stability analysis, Zubov's theorems on the stability of homogeneous systems are applied to Lyapunov second method.
Results. In the course of research, the authors have obtained the conditions under which the asymptotic stability of the zero solution of a singularly perturbed system is a consequence of the analogous property of the reduced and boundary systems. This conclusion is valid for sufficiently small values of the perturbing parameter. To verify the hypothesis of the theorem, it is required to construct homogeneous Lyapunov functions.
Discussion and Conclusions. The paper gives a numerical example showing the class of systems satisfying the obtained theorem is not empty. An upper bound for the variation of a small parameter has been obtained, within which the zero solution is guaranteed to be asymptotically stable.

Keywords: singularity, small parameter, stability, decomposition, homogeneous function

For citation: Kozlov M. V., Shchennikov V. N. Asymptotic Stability of Homogeneous Singular Systems. *Vestnik Mordovskogo universiteta* = Mordovia University Bulletin. 2017; 27(4):546–554. DOI: 10.15507/0236-2910.027.201704.546-554

Введение

Сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений применяются при математическом моделировании систем, содержащих быстрые и медленные переменные. Примером могут служить системы гироскопической стабилизации, рекуррентные нейронные сети, биологические и электрические системы и пр. Достаточно широкий обзор сферы применения сингулярных систем можно найти в работах[1] [1–3].

Базовым результатом в теории сингулярных возмущений считается работа А. Н. Тихонова [4], в которой были получены достаточные условия предельного перехода по малому параметру в задаче Коши. При этом также был предъявлен основной подход к исследованию сингулярных систем – декомпозиция исходной системы на систему быстрых и медленных движений. Данный подход нашел широкое применение в различных задачах исследования сингулярных систем (устойчивость, стабилизация, управление).

Обзор литературы

В рамках приложений важнейшим свойством решений сингулярных систем является устойчивость по Ляпунову. Данной задаче посвящено немало работ[1] [1–3]. Первой в данном направлении является работа [5], в которой исследовались, соответственно, линейные сингулярные системы вида:

$$\dot{x} = A_{11}(t)x + A_{12}(t)y,$$
$$\varepsilon\dot{y} = A_{21}(t)x + A_{22}(t)y.$$

и квазилинейные системы вида

$$\dot{x} = A_{11}(t)x + A_{12}(t)y + f(t),$$
$$\varepsilon\dot{y} = A_{21}(t)x + A_{22}(t)y.$$

Кроме того, в данной работе рассматривались системы, допускающие выделение линейного приближения.

В дальнейшем исследования проводились в направлении нелинейных систем. В данном направлении выделено два ведущих метода, широко применяемые при исследовании нелинейных динамических систем: метод интегральных многообразий [3] и метод функций Ляпунова[1]. В работе данного автора представлены условия асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейных сингулярных систем общего вида

[1] **Халил К. Х.** Нелинейные системы. М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 832 с. URL: http://mirknig.su/knigi/tehnicheskie_nauki/47471-nelineynye-sistemy.html

$$\dot{x} = f(t,x,y),$$
$$\varepsilon\dot{y} = g(t,x,y),$$

однако данный результат неприменим к однородным системам, которые рассматриваются в настоящей статье. С задачей об устойчивости тесно связана задача стабилизации программного движения, в которой в качестве методов построения стабилизирующих управлений используются результаты решения задачи об устойчивости. В работах [6–8] были исследованы вопросы стабилизации нелинейных сингулярных систем.

Материалы и методы

В данной работе для исследования сингулярных систем с однородной правой частью применяются методы и теоремы из работы[2]. Приведем необходимые определения и теоремы.

Определение 1

Непрерывная функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется однородной порядка $\mu \in Q$, если для произвольного $c\in R$ справедливо равенство

$$f(cx_1,\ldots,cx_n) = c^{\mu} f(x_1,\ldots,x_n), \forall x \in R^n.$$

Однородные функции удовлетворяют следующей двусторонней оценке:

$$a_1 x^{\mu} \le f(x) \le a_2 x^{\mu}, \quad a_1 = \max_{x=1} f(x), \quad a_2 = \max_{x=1} f(x). \tag{1}$$

Кроме того, если однородная порядка ∞ функция непрерывно дифференцируема, то ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ также являются однородными функциями порядка $\mu - 1$, а следовательно, справедлива оценка

$$\| \nabla f(x) \| \le a_3 \| x \|^{\mu}, a_3 = const > 0. \tag{2}$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = X^{\mu}(x), \tag{3}$$

где $x \in R^n$, $X^{\mu}(x)$ – непрерывная вектор-функция, элементы которой являются однородными порядка ∞ функциями.

Теорема 1

Если нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво, то существует однородная порядка *M*, положительно определенная функция $v(x)$, удовлетворяющая условию

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(3)} = \nabla^{T} v(x) \cdot X^{(\mu)}(x) = -w(x),$$

где $w(\mathrm{x})$ – однородная порядка; $(M - 1 + \mu)$ – положительно определенная функция.

Результаты исследования

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему

$$\dot{x} = X^{\mu}(x,y), \quad \varepsilon\dot{y} = Y^{\mu}(x,y), \tag{4}$$

где $x \in R^{n_1}$, $y \in R^{n_2}$; X^{μ}, Y^{μ} – вектор-функции, однородные порядка $\mu = \frac{p}{q} > 1$; *p, q* – нечетные числа; $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Предположим, что существует единственная вектор-функция $\phi(x)$, удовлетворяющая тождеству

$$Y^{\mu}(x,\phi(x)) \equiv 0, \forall x \in R^{n_1}. \tag{5}$$

В силу однородности Y^{μ} вектор-функция $\phi(x)$ должна быть однородной первого порядка. Теперь для системы (4) можно записать редуцированную систему

$$\dot{x} = X^{\mu}(x,\phi(x)) \tag{6}$$

[2] **Александров А. Ю.** Устойчивость движений неавтономных динамических систем. СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2004. 186 с.

и пограничную систему

$$\dot{z} = Y^{\mu}\left(x, z+\phi(x)\right), \qquad (7)$$

где $x \in R^{n_1}$ играет роль параметра.

Сформулируем и докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1

Функция $f(r_1, r_2) = r_1^{\alpha} r_2^{\beta}$, где $\alpha, \beta > 1$, при $r_1, r_2 > 0$ и любом $\delta > 0$ удовлетворяет неравенству

$$r_1^{\alpha} r_2^{\beta} \le H\left(\delta^{\beta} r_1^{\alpha+\beta} + \delta^{-\alpha} r_2^{\alpha+\beta}\right). \qquad (8)$$

Доказательство

Функция $f(r_1, r_2)$ является однородной порядка $\alpha+\beta$ и, следовательно, удовлетворяет верхней оценке

$$r_1^{\alpha} r_2^{\beta} \le H\left(r_1^{\alpha+\beta} + r_2^{\alpha+\beta}\right),$$

где

$$H = \max_{r_1, r_2 \in S} f(r_1, r_2), S =$$

$$= \left\{(r_1, r_2) : r_1^{\alpha+\beta} + r_2^{\alpha+\beta} = 1, r_1, r_2 \ge 0\right\}.$$

После подстановки $r_1 = \delta^2 r_1$, $r_2 = \delta r_2$ и сокращения обеих частей неравенства на множитель $\delta^{2\alpha+\beta}$, получаем неравенство (8). Методами математического анализа нетрудно получить формулу для вычисления величины H:

$$H = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}. \qquad (9)$$

Теорема 2

Пусть выполнены следующие условия:

Для системы (6) найдена однородная четного порядка M положительно определенная функция $v_1(x)$, удовлетворяющая неравенствам

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(6)} = \nabla^T v_1(x) \cdot X^{(\mu)} \cdot$$

$$\cdot\left(x, \phi(x)\right) \le -\|x\|^{M+\mu-1}; \qquad (10)$$

$$\left|\nabla^T v_1(x) \cdot (X^{(\mu)}\left(x, z+\phi(x)\right) - X^{(\mu)}\left(x, \phi(x)\right))\right| \le$$

$$\le k_1 \sum_{i=1}^{s} \|x\|^{\alpha_i} \cdot \|z\|^{M+\mu-1-\alpha_i}, \qquad (11)$$

где $k_1, \alpha_i = const > 0$, s – некоторое число.

Для системы (7) найдена однородная порядка M функция $v_2(x, z)$, удовлетворяющая оценкам

$$c_1 \|z\|^M \le v_2(x, z) \le c_2\left(\|x\|^M + \|z\|^M\right), \qquad (12)$$

$$\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(7)} = \nabla_z^T v_2(x, z) \cdot$$

$$\cdot Y^{(\mu)}\left(x, z+\phi(x)\right) \le -\|z\|^{M+\mu-1}, \qquad (13)$$

$$\left|\nabla_x^T v_2(x, z) \cdot X^{(\mu)}\left(x, z+\phi(x)\right)\right| \le$$

$$\le k_2 \sum_{i=1}^{p} \|x\|^{\beta_i} \cdot \|z\|^{M+\mu-1-\beta_i}, \qquad (14)$$

$$\left|\nabla_z^T v_2(x, z) \cdot \frac{D\phi}{Dx} X^{(\mu)}\left(x, z+\phi(x)\right)\right| \le$$

$$\le k_3\left(\|z\|^{M+\mu-1} \cdot \sum_{i=1}^{q} \|x\|^{\gamma_i} \|z\|^{M+\mu-1-\gamma_i}\right), \qquad (15)$$

где $c_{1,2}, k_{1,2} \beta_i, \gamma_i = const > 0$.

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво.

Доказательство

Сделаем в системе (4) замену $y = z + \phi(x)$, которая сохраняет асимптотическую устойчивость нулевого решения. В результате получим более удобную для исследования систему

$$\dot{x} = X^{(\mu)}\left(x, z+\phi(x)\right),$$

$$\dot{z} = \frac{1}{\varepsilon} Y^{(\mu)}\left(x, z+\phi(x)\right) - \qquad (16)$$

$$-\frac{D\phi}{Dx} X^{(\mu)}\left(x, z+\phi(x)\right).$$

Доказательство теоремы будем проводить при помощи функции $V(x,z)=v_1(x)+v_2(x,z)$, которая, очевидно, является положительно определенной. Запишем ее полную производную в силу системы (16):

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(16)}=\nabla^{\mathrm{T}}v_1(x)\cdot X^{(\mu)}\left(x,z+\phi(x)\right)+$$
$$+\nabla_x^T v_2(x,z)\cdot X^{(\mu)}\left(x,z+\phi(x)\right)+\frac{1}{\varepsilon}\nabla_z^T v_2(x,z)\cdot \tag{17}$$
$$\cdot Y^{(\mu)}\left(x,z+\phi(x)\right)-\nabla_z^T v_2(x,z)\cdot\frac{D\phi}{Dx}X^{(\mu)}\left(x,z+\phi(x)\right).$$

Для того чтобы оценить правую часть выражения (17), воспользуемся неравенствами (8; 10; 11; 13–15), в результате чего получим:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(16)}\le -\|x\|^{M+\mu-1}-\frac{1}{\varepsilon}\|z\|^{M+\mu-1}+k_1\sum_{i=1}^{s}\|x\|^{\alpha_i}\cdot\|z\|^{M+\mu-1-\alpha_i}+$$
$$+k_{21}\sum_{i=1}^{p}\|x\|^{\beta_i}\cdot\|z\|^{M+\mu-1-\beta_i}+k_{31}\|z\|^{M+\mu-1}+k_{31}\sum_{i=1}^{q}\|x\|^{\gamma_i}\cdot\|z\|^{M+\mu-1-\gamma_i}. \tag{18}$$

Согласно лемме 1, неравенство (18) можно продолжить следующим образом:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(16)}\le -\|x\|^{M+\mu-1}-\left(\frac{1}{\varepsilon}-k_3\right)\|z\|^{M+\mu-1}+k_1\sum_{i=1}^{s}h_{1i}\left(\delta_{1i}^{M+\mu-1-\alpha_i}\|x\|^{M+\mu-1}+\delta_{1i}^{-\alpha_i}\|z\|^{M+\mu-1}\right)+$$
$$+k_2\sum_{i=1}^{p}h_{2i}\left(\delta_{2i}^{M+\mu-1-\beta_i}\|x\|^{M+\mu-1}+\delta_{2i}^{-\beta_i}\|z\|^{M+\mu-1}\right)+k_3\sum_{i=1}^{q}h_{3i}\left(\delta_{3i}^{M+\mu-1-\gamma_i}\|x\|^{M+\mu-1}+\delta_{3i}^{-\gamma_i}\|z\|^{M+\mu-1}\right), \tag{19}$$

где $\delta_{1i},\delta_{2i},\delta_{3i}>0$ – произвольные числа; h_{1i},h_{2i},h_{3i} в соответствии с формулой (9) определяются соотношениями

$$h_{1i}=\left(\frac{\alpha_i}{M+\mu-1}\right)^{\frac{\alpha_i}{M+\mu-1}}\left(\frac{M+\mu-1-\alpha_i}{M+\mu-1}\right)^{\frac{M+\mu-1-\alpha_i}{M+\mu-1}},$$
$$h_{2i}=\left(\frac{\beta_i}{M+\mu-1}\right)^{\frac{\beta_i}{M+\mu-1}}\left(\frac{M+\mu-1-\beta_i}{M+\mu-1}\right)^{\frac{M+\mu-1-\beta_i}{M+\mu-1}}, \tag{20}$$
$$h_{3i}=\left(\frac{\gamma_i}{M+\mu-1}\right)^{\frac{\gamma_i}{M+\mu-1}}\left(\frac{M+\mu-1-\gamma_i}{M+\mu-1}\right)^{\frac{M+\mu-1-\gamma_i}{M+\mu-1}}.$$

После перегруппировки слагаемых в правой части неравенства (19) получим:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(16)}\le\left(1-k_1\sum_{i=1}^{s}h_{1i}\delta_{1i}^{M+\mu-1-\alpha_i}-k_2\sum_{i=1}^{p}h_{2i}\delta_{2i}^{M+\mu-1-\beta_i}-k_3\sum_{i=1}^{q}\delta_{3i}^{M+\mu-1-\gamma_i}\right)\|x\|^{M+\mu-1}-$$
$$-\left(\frac{1}{\varepsilon}-k_3-k_1\sum_{i=1}^{s}h_{1i}\delta_{1i}^{-\alpha_i}-k_2\sum_{i=1}^{p}h_{2i}\delta_{2i}^{-\beta_i}-k_3\sum_{i=1}^{q}h_{3i}\delta_{3i}^{-\gamma_i}\right)\|z\|^{M+\mu-1}. \tag{21}$$

Очевидно, что можно подобрать такие достаточно малые числа, $\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}$, чтобы выполнялось неравенство:

$$1-k_1\sum_{i=1}^{s} h_{1i}\delta_{1i}^{M+\mu-1-\alpha_i} - k_2\sum_{i=1}^{p} h_{2i}\delta_{2i}^{M+\mu-1-\beta_i} - k_3\sum_{i=1}^{q} h_{3i}\delta_{3i}^{M+\mu-1-\gamma_i} > 0. \quad (22)$$

Тогда правая часть выражения (21) становится отрицательно определенной при $\varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 определяется по формуле

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{k_3 + k_1\sum_{i=1}^{s} h_{1i}\delta_{1i}^{-\alpha_i} + k_2\sum_{i=1}^{p} h_{2i}\delta_{2i}^{-\beta_i} + k_3\sum_{i=1}^{q} h_{3i}\delta_{3i}^{-\gamma_i}}. \quad (23)$$

Таким образом, функция $V(x,x)$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$ удовлетворяет теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости. Следовательно, нулевое решение системы (16), а значит, и (4) при таких значениях ε будет асимптотически устойчивым.

Теорема доказана.

Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + y_1^3 + y_2^3, \\ \varepsilon\dot{y}_1 &= a^3x^3 - y_1^3, \\ \varepsilon\dot{y}_2 &= b^3x^3 - y_2^3, \end{aligned} \quad (24)$$

где $a,b>0$. Здесь $\phi_1(x) = ax$, $\phi_2(x) = bx$.

Редуцированная система имеет вид

$$\dot{x} = \left(a^3 + b^3 - 1\right)x^3; \quad (25)$$

пограничная система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -3a^2x^2z_1 - 3axz_1^2 - z_1^3, \\ \dot{z}_2 &= -3b^2x^2z_2 - 3bxz_2^2 - z_2^3. \end{aligned} \quad (26)$$

Для системы (25) функция Ляпунова имеет вид $v_1(x) = x^4$, а для системы (26) – $v_2(x,z_1,z_2) = z_1^4 + z_2^4 + x^2z_1^2 + x^2z_2^2$. Оценки (10–15) будут выглядеть следующим образом:

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(25)} \le -4\left(1-a^3-b^3\right)|x|^6.$$

$$\left|\nabla^T v_1(x)\cdot\left(X^{(\mu)}\left(x, z+\phi(x)\right) - X^{(\mu)}\left(x,\phi(x)\right)\right)\right| \le K_1\left(|x|^3z^3 + |x|^4z^2 + |x|^5z\right), \quad (27)$$

$$z^4 \le v_2(x,z_1,z_2) \le |x|^4 + z^4,$$

$$\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(26)} \le -z^6,$$

$$\left|\nabla_x^T v_2(x,z)\cdot X^{(\mu)}\left(x,z+\phi(x)\right)\right| \le K_2\left(|x|^3z^5 + |x|^2z^4 + |x|^3z^3\right), \quad (28)$$

$$\left|\nabla_z^T v_2(x,z)\cdot\frac{D\phi}{Dx}X^{(\mu)}\left(x,z+\phi(x)\right)\right| \le K_3\left(z^6 + |x|z^5 + |x|^2z^4 + |x|^4z^2\right).$$

где $K_{1,2,3}$ определяются по формулам:

$$K_1 = \max\left\{4; \max\{a,b\}; 12\sqrt{a^4+b^4}\right\},$$

$$K_2 = \max\left\{2; 6\max\{a,b\}; 6\sqrt{a^4+b^4}\right\},$$

$$K_3 = \max\left\{4\max\{a,b\}; 12\max\{a,b\} + 2\sqrt{a^2+b^2}; 6\max\{a,b\}\sqrt{a^2+b^2}; 6\sqrt{a^2+b^2\sqrt{a^4+b^4}}\right\}.$$

Величины h_{1i}, h_{2i}, h_{3i} вычислим по формулам (20):

$$h_{11} = h_{23} = h_{33} = \frac{1}{2},$$

$$h_{12} = h_{22} = h_{32} = h_{34} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3},$$

$$h_{13} = h_{21} = h_{31} = \sqrt[6]{\frac{5^5}{6}},$$

Далее требуется подобрать такие значения $\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}$, чтобы выполнялось неравенство (22), после чего остается вычислить верхнюю границу допустимого диапазона изменения параметра ε по формуле (23). Поскольку $K_{1,2,3}$ в нашем примере зависят от коэффициентов a, b, то полученное в итоге значение ε_0 будет зависеть от a, b, $\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}$. Коэффициенты a, b должны удовлетворять условию $a^3 + b^3 < 1$, чтобы нулевое решение системы (25) было асимптотически устойчивым.

Обсуждение и заключения

Полученная теорема 2 дает достаточные условия асимптотической устойчивости однородных сингулярных систем в общем случае. Достоинством результата является возможность свести исследование исходной системы к исследованию двух систем меньшей размерности, что может оказаться полезным в силу их существенно нелинейной структуры. Соотношения (20; 22–23) позволяют количественно оценить верхнюю границу допустимой вариации малого параметра.

Условия теоремы 2 основываются на существовании однородных функций Ляпунова [9–10]. Функция $v_1(x)$ существует исходя из теоремы 1. Вопрос о критерии существования функции $v_2(x,z)$ для системы (7) является открытым, а следовательно, проверка второго условия теоремы 2 требует чисто конструктивного подхода.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Naidu D. S.** Singular perturbations and time scales in control theory and applications : overview // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems (DCDIS) Journal. 2002. Vol. 9, no. 2. P. 233–278. URL: https://www.researchgate.net/publication/247533767_Singular_Perturbations_and_Time_Scales_in_Control_Theory_and_Applications_An_Overview

2. Singular perturbations and time scales in control theories and applications : an overview 2002–2012 / Y. Zhang [et al.] // International Journal of Information and Systems Sciences. 2014. Vol. 9, no. 2. P. 1–36. URL: https://pdfs.semanticscholar.org/5d1f/e4a9d368187a654198c0a71d5ad9b8fff520.pdf

3. **Дмитриев М. Г., Курина Г. А.** Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=1125&option_lang=rus

4. **Тихонов А. Н.** О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. 1948. № 22 (64). С. 193–204. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=6075&option_lang=rus

5. **Климушев А. И., Красовский Н. Н.** Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25, вып. 4. С. 680–690.

6. **Lobry C., Sari T.** Singular perturbation methods in control theory // Controle non Lineaire et Applications. 2005. No. 15. P. 151–177. URL: http://archive.schools.cimpa.info/archivesecoles/20131129112411/lscimpa2.pdf

7. **Косов А. А., Козлов М. В.** Стабилизация одного класса сингулярных систем методом декомпозиции // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. 2016. № 15. С. 77–84. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_26738739_45442941.pdf

8. **Козлов М. В**. Стабилизация сингулярно возмущенных систем с полиномиальной правой частью // Журнал СВМО. 2017. Т. 19, № 1. С. 51–59. URL: http://svmo.mrsu.ru/journal/archive/article?id=1535

9. **Зубов В. И.** Исследование задачи об устойчивости для систем уравнений с однородными правыми частями // Доклады АН СССР. 1957. Т. 114, № 5. С. 942–944.

10. Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // Systems & Control Letters. 1992. No 19. P. 467–473. URL: http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Lionel.Rosier/publi/SCL92.pdf

Поступила 27.06.2017; принята к публикации 12.10.2017; опубликована онлайн 19.12.2017

Об авторах:

Козлов Михаил Владимирович, преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, факультет математики и информационных технологий, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), **ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7681-8931**, kozlov.mvl@yandex.ru

Щенников Владимир Николаевич, профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, факультет математики и информационных технологий, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), доктор физико-математических наук, **ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5230-3482**, du@math.mrsu.ru

Вклад соавторов:

М. В. Козлов: доказательство утверждений статьи, подготовка примера; В. Н. Щенников: постановка задачи, определение методов исследования, обзор литературы.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

REFERENCES

1. Naidu D. S. Singular perturbations and time scales in control theory and applications: Overview. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems (DCDIS) Journal. 2002; 9(2):233–278. Available at: https://www.researchgate.net/publication/247533767_Singular_Perturbations_and_Time_Scales_in_Control_Theory_and_Applications_An_Overview

2. Zhang Y., Subbaram D., Chenxiao N., Zou C. Y. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: An overview 2002–2012. International Journal of Information and Systems Sciences. 2014; 9(2):1–36. Available at: https://pdfs.semanticscholar.org/5d1f/e4a9d368187a654198c0a71d5ad9b8fff520.pdf

3. Dmitriyev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control problems. *Avtomatika i telemekhanika* = Automation and Telemechanics. 2006; 1:3–51. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=1125&option_lang=rus (In Russ.)

4. Tikhonov A. N. [On dependence of solutions of differential equations on a small parameter]. *Matematicheskiy sbornik* = Mathematical Collection. 1948; 22(64):193–204. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=6075&option_lang=rus (In Russ.)

5. Klimushev A. I., Krasovsky N. N. [Uniform asymptotic stability of systems of differential equations with a small parameter for derivatives]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* = Applied Mathematics and Mechanics. 1961; 25(4):680–690. (In Russ.)

6. Lobry C., Sari T. Singular perturbation methods in control theory. Controle non Lineaire et Applications. 2005; 15:151–177. Available at: http://archive.schools.cimpa.info/archivesecoles/20131129112411/lscimpa2.pdf

7. Kosov A. A., Kozlov M. V. [Stabilizating a class of singular systems by the decomposition method]. *Informatsionnyye tekhnologii i problemy matematicheskogo modelirovaniya slozhnykh system* = Information technologies and problems of mathematical modeling of complex systems. 2016; 15:77–84. Available at: https://elibrary.ru/download/elibrary_26738739_45442941.pdf (In Russ.)

8. Kozlov M. V. [Stabilization of singularly perturbed systems with a polynomial right-hand side]. *Zhurnal SVMO* = MVMS Journal. 2017; 19(1):51–59. Available at: http://svmo.mrsu.ru/journal/archive/article?id=1535 (In Russ.)

9. Zubov V. I. Investigation of the stability problem for systems of equations with homogeneous right-hand sides. *Doklady AN SSSR* = Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1957; 114(5):942–944. (In Russ.)

10. Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. Systems & Control Letters. 1992; 19:467–473. Available at: http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Lionel.Rosier/publi/SCL92.pdf

Submitted 27.06.2017; revised 12.10.2017; published online 19.12.2017

About the authors:

Mikhail V. Kozlov, Lecturer of Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), **ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7681-8931**, kozlov.mvl@yandex.ru

Vladimir N. Shchennikov, Professor of Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), **ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5230-3482**, du@math.mrsu.ru

Contribution of the co-authors:

M. V. Kozlov: proof of the research provisions; presentation of example; V. N. Shchennikov: formulation of the problem, definition of research methods, reviewing the literature.

All authors have read and approved the final version of the manuscript.

http://vestnik.mrsu.ru ISSN Print 0236-2910
ISSN Online 2313-0636

УДК 005.11 DOI: 10.15507/0236-2910.027.201704.555-576

Динамика целевых индикаторов результативности научной деятельности членов диссертационных советов

С. И. Пахомов[1], О. В. Кулямин[1], В. А. Гуртов[2*], И. В. Пенние[2]
[1]*Министерство образования и науки Российской Федерации (г. Москва, Россия)*
[2]*ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет» (г. Петрозаводск, Россия)*
[*]*vgurt@psu.karelia.ru*

Введение. Сеть диссертационных советов, представляя собой социальную систему в сфере развития науки и образования, требует разработки и совершенствования методов получения, обработки и анализа информации. В статье представлен анализ поэтапного достижении целевых индикаторов результативности научной деятельности членов диссертационных советов и организаций, на базе которых действуют диссертационные советы.
Материалы и методы. Повышение качества работы системы государственной аттестации потребовало привлечения математического аппарата и программных средств для автоматизации обработки данных и формирования управленческих решений по оптимизации сети диссертационных советов. Показатели для анализа результативности были получены в ходе мониторинга деятельности сети диссертационных советов в 2015–2016 гг. Целевые индикаторы результативности государственной системы научной аттестации были определены на основании решения Высшей аттестационной комиссии при Минобрнауки России от 03.06.2015 г.
Результаты исследования. Для выработки управленческих решений по оптимизации сети диссертационных советов было проведено сравнение фактически достигнутых результатов и плановых целевых индикаторов. При этом массив обрабатываемых данных составил > 60 тыс. членов диссертационных советов, а число показателей для каждого из них, включая перечень публикаций за 5 лет, достигло 100 единиц. Анализ показал рост степени соответствия результативности научной деятельности критериальным значениям: данный показатель возрос в 2016 г. по сравнению с 2015 г. для организаций с 86,7 % до 88,3 %, а для членов диссертационных советов – с 66,2 % до 77,1 % соответственно. Проведенные мониторинги оценки качества деятельности сети диссертационных советов в 2015–2016 гг. позволили сформировать рейтинги диссертационных советов по 52 группам научных специальностей, где в качестве критерия выступала степень соответствия диссертационного совета в целом критериальным требованиям, предъявляемым ВАК к индикаторам результативности научной деятельности организаций, на базе которых действуют диссертационные советы, и членов диссертационных советов.
Обсуждение и заключения. Анализ результативности деятельности диссертационных советов показал положительную динамику в движении данного показателя к значениям целевых индикаторов, представленных в Дорожной карте. Полученная информация послужит научной основой для выработки управленческих решений по оптимизации сети диссертационных советов.

Ключевые слова: диссертационный совет, мониторинг, результативность, научная деятельность, дорожная карта