УДК 517.9 DOI: 10.15507/0236-2910.026.201604.440-447

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА-ФАУЛЕРА

Т. Ф. Мамедова[1*], **Д. К. Егорова**[1], **Е. В. Десяев**[1], **Р. Хесс**[2]
[1]ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия)
[2]Гёттингенский университет имени Георга-Августа (г. Гёттинген, Германия)
[*]mamedovatf@yandex.ru

Введение. В статье рассматривается новый подход к исследованию уравнений типа Эмдена-Фаулера.
Материалы и методы. Для решения поставленной задачи применяется метод асимптотической эквивалентности, разработанный Е. В. Воскресенским. Понятие асимптотической эквивалентности дифференциальных уравнений не имеет однозначного трактования. Однако все существующие значения объединяет указание на отношение эквивалентности, определенном через асимптотические свойства решений. В общем случае данное отношение определяется полугруппой преобразований с единицей некоторого класса дифференциальных уравнений в себя.
Результаты исследования. В статье приводятся асимптотические формулы для решения нелинейного дифференциального уравнения; формулируются необходимые для решения задачи теоремы и следствия из них; проводится полное доказательство сформулированных теорем. В результате исследований были получены более точные формулы для решения уравнения Эмдена-Фаулера.
Обсуждение и заключения. Полученные результаты согласуются с аналогичными исследованиями других авторов и дополняют их. Дальнейшая работа по данной тематике предполагает применение полученных результатов в различных областях, например, исследовании математических моделей в экономике и экологии.

Ключевые слова: уравнение Эмдена-Фаулера, асимптотическое интегрирование, асимптотическая эквивалентность, дифференциальные уравнения, математическая модель

Для цитирования: Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера / Т. Ф. Мамедова [и др.] // Вестник Мордовского университета. 2016. Т. 26, № 4. С. 440–447. DOI: 10.15507/0236-2910.026.201604.440-447

Благодарности: Авторы выражают свою признательность и благодарность анонимному рецензенту журнала, чьи подробные комментарии и рекомендации помогли улучшить статью.

ASYMPTOTIC INTEGRATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF EMDEN-FOWLER

T. F. Mamedova[a*], **D. K. Yegorova**[a], **Ye. V. Desyayev**[a], **R. Hess**[b]
[a]*National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)*
[b]*Georg-August University of Goettingen (Goettingen, Germany)*
[*]*mamedovatf@yandex.ru*

Introduction. This article examines a new approach to the analysis of Emden-Fowler equations.
Materials and Methods. In this article, which is based on the methods proposed by V. Ye. Voskresensky [Comparison methods in nonlinear analysis? Saransk, 1990], a new approach to the analysis of Emden-Fowler equations was found. The concept of asymptotic equivalence of the differential equations has no unequivocal meaning. Various authors have different views on it. Nevertheless, all authors discuss about the equivalence relation defined by the asymptotic properties of the solutions. In general, this ratio is determined by the transformation semigroup with identity of a certain class of differential equations into itself.
Results. The paper contains asymptotic formula for the solution of nonlinear differential equations. The procedure outlined is required to solve the problem of the theorem and their implications. Also a complete proof of these theorems was conducted. These studies obtained more accurate formula for the solution of the equation of Emden-Fowler.
Discussion and Conclusions. The obtained results are consistent with similar studies of other authors and complement them. Further work on this topic involves the use of the results in a variety of applications, namely an application to the study of mathematical models in the field of economy and ecology.

Keywords: Emden-Fowler equation, asymptotic integration, asymptotic equivalence, differential equations, mathematical model

For citation: Mamedova TF, Yegorova DK, Desyayev YeV, Hess R. Asymptotic integration of differential equations of Emden-Fowler. *Vestnik Mordovskogo universiteta* = Mordovia University Bulletin. 2016; 4(26):440-447. DOI: 10.15507/0236-2910.026.201604.440-447

Acknowledgments: The authors express their appreciation and gratitude to the anonymous reviewer of the journal, whose detailed comments and recommendations helped to improve the article.

Введение

Решение уравнений типа Эмдена-Фаулера изучалось во многих работах. Интерес к этой задаче не теряется и в настоящее время. Данное уравнение находит свое применение при решении многих прикладных задач. Например, в работе [1] оно лежит в основе математической модели конкурентоспособности и производительности некоторого предприятия. Конкурентоспособность $F\left(P(n)\right)$ является степенной функцией от производительности $P(n)$, причем существуют такие константы $p>0$ и k, при которых

$$F\left(P(n)\right)=P(n)^p\,n^k\,,$$

где n – номер исследуемой структуры предприятия.

Производительность $P(n)$ > P_0 и F пропорционально второй производной P по n. Для $F\left(P(n)\right)=M(n)\dfrac{\partial^2 P(n)}{\partial n^2}$, как правило, $M(n)=n$. В результате получим уравнение с начальными условиями:

$$\begin{cases} nP(n)''-P(n)^p\,n^k=0, n\geq n_0, \\ P(n_0)=P_0\geq 0, P'(n_0)=P_1. \end{cases}$$

Обзор литературы

Для уравнений типа Эмдена-Фаулера получены существенные результаты, которые не только дополняют классические исследования, изложенные в монографии Р. Беллмана [2], но и демонстрируют практическое применение полученных результатов. Постоянный интерес обусловлен также тем, что уравнение широко применяется в различных областях, от экономики до математической физики.

Первоначально уравнение рассматривалось в виде:

$$(t^{\delta} u')' \pm t^{\gamma} u^n = 0,$$

где δ, γ, n – постоянные.

Оно было получено Р. Эмдоном в связи с изучением условий равновесия политропного газового шара. Новые свойства решений уравнения Эмдена-Фаулера, касающиеся их продолжимости, были получены в исследованиях китайских математиков Чанга и Ли [1; 3–6]. Систематическое изложение результатов анализа продолжимости решения приведено в работах В. С. Самовола [7–8]. Вопрос существования решений для квазилинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера высокого порядка исследуется в работе И. В. Асташовой [9].

Материалы и методы

Для исследования решений уравнения Эмдена-Фаулера применялся метод асимптотической эквивалентности. Нами было исследовано дифференциальное уравнение n-ого порядка, которое при n = 2 превращается в уравнение Эмдена-Фаулера.

Рассмотрим данное дифференциальное уравнение:

$$y^{(n)} = \phi(t) \, | y |^{\lambda} \operatorname{sgn} y, \tag{1}$$

где $t \in [T, +\infty), T \geq 1, \lambda > 0, n \geq 1$ – целое $\phi \in C([T, +\infty))$.

Докажем асимптотическую эквивалентность по Брауеру уравнения (1) и уравнения

$$x^{(n)} = 0. \tag{2}$$

Ясно, что выражения (1–2) представляются соответствующими системами, при этом можно было бы прибегнуть к результатам работы [4]. Однако новые методы доказательства асимптотической эквивалентности были применены именно для уравнения (1). При этом для простоты изложения в данной статье не рассматривается задача покомпонентной асимптотической эквивалентности.

Обратимся к условиям, при которых существуют решения уравнения (1), имеющие при $t \to +\infty$ вид:

$$y(t) = a_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + \ldots \\ \ldots + a_{n-2} t + a_{n-1} + o(1). \tag{3}$$

Некоторые асимптотические свойства этого уравнения были рассмотрены в работе Р. Беллмана [2]; при $n = 2,\ a_0 \neq 0$ эта задача была решена Е. В. Воскресенским. В данном случае она решается при произвольном натуральном n и произвольном наборе чисел $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ на основе метода асимптотической эквивалентности [10–13].

Результаты исследования

Результаты проведенного исследования сформулируем в виде следующих теорем.

Теорема 1

Если $0 < \lambda \leq 1$ и

$$\int_t^{+\infty} \int_{S_1}^{+\infty} \ldots \int_{S_{n-1}}^{+\infty} | \phi(S_n) | \, S_n^{\lambda(n-1)} \alpha^{\lambda} ds_1 \ldots ds_n = o(1)$$

при $t \to +\infty$, то все решения уравнения (1) имеют вид (3).

Доказательство:

На множестве $T \leq t_0 \leq t < +\infty$ запишем уравнение

$$y(t) = a_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + \\ + \ldots + a_{n-2} t + a_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \\ \int_{t_0}^{t} (t - s)^{n-1} \phi(s) \, | y(s) |^{\lambda} \operatorname{sgn} y(s) ds. \tag{4}$$

Тогда $\frac{|y(t)|}{t^{n-1}} \le c + c_0 \int_{t_0}^{t} |\phi(s)| \, |y(s)|^{\lambda} \, ds$,

где $c, c_0 \ge 0$, и на основании теоремы 1.1 из работы [13] запишем:

$$|y(t)| \le c_1 t^{n-1}, t \ge t_0, \qquad (5)$$

где $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$; t_0 – достаточно большое число, зависящее от чисел $y_0, ..., y_0^{(n-1)}$.

Поскольку

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} \phi(s) |y(s)|^{\lambda} \operatorname{sgn} y(s) ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} ... \int_{t_0}^{s_{n-1}} \phi(s_n) |y(s_n)|^{\lambda} \operatorname{sgn} y(s_n) ds_1 ... ds_n,$$

то из равенства (4), неравенства (5) и условия теоремы получим:

$$y(t) = b_0 t^{n-1} + b_1 t^{n-2} + ... + b_{n-2} t + b_{n-1} + o(1).$$

Приняв в качестве уравнения сравнения уравнение вида:

$$\frac{dz}{dt} = c_0 |\phi(t)| t^{\lambda(n-1)} z^{\lambda} \qquad (6)$$

и, применяя теорему 1.1 из работы [Там же], убедимся в равномерной ограниченности решений этого уравнения при любом $c_0 \ge 0$ на множестве $D = \{z : 0 \le z \le K, t \ge T > 1\}$, где K – произвольное фиксированное число, $0 < \lambda < 1$.

На основании теоремы сравнения и равномерной ограниченности решений уравнения (6) неравенство (5) справедливо при достаточно большом T и произвольных, но достаточно малых $y_0, ..., y_0^{(n-1)}$. Поэтому оценка (5) равномерна относительно *t*, и при достаточно большом T все решения уравнения (1) $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$ имеют вид (3).

Доказательство закончено.

Теорема 2

Пусть выполняются условия теоремы 1, а

$$Y_j(\lambda) = \int_{1}^{+\infty} \int_{S_1}^{+\infty} ... \int_{S_{j-1}}^{+\infty} |\phi(s_j)| s_j^{\lambda(n-1)} \alpha^{\lambda} ds_1 ... ds_j$$

существует и интегрируема на любом компакте из $[\beta, +\infty)$ при всех $j = \overline{1, n}$. Тогда для любого набора действительных чисел $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ существует такое решение $y(t)$ уравнения (1), при котором

$$y(t) = a_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + ... + a_{n-2} t + a_{n-1} + o(1)$$

при $t \to +\infty$.

Доказательство:

При $t_0 \ge T$ рассмотрим семейство решений уравнения (1):

$$y(t) = a_0 t^{n-1} + ... + a_{n-2} t + a_{n-1} +$$
$$+(-1)^{n-1} \int_{t}^{+\infty} \int_{S_1}^{+\infty} ... \int_{S_{n-1}}^{+\infty} \phi(S_n) |y(S_n)|^{\lambda} \operatorname{sgn} y(s_n) ds_1 ... ds_n,$$

при котором выполняются все условия теоремы 1.1 из работы [Там же]. Отсюда следует равномерная ограниченность семейства $\{v(t)\}$. Поскольку при любых $\bar{t}, \bar{\bar{t}} \ge 1$

$$|v(\bar{t}) - v(\bar{\bar{t}})| \le \int_{t}^{+\infty} \int_{S_1}^{+\infty} ... \int_{S_{n-1}}^{+\infty} |\phi(S_n)| S_n^{\lambda(n-1)} c^{\lambda} ds_1 ... ds_n,$$

то это семейство равностепенно непрерывно и, таким образом, компактно. Поэтому существует последовательность $\{t_0''\}$, сводящаяся к функции $y(t)$ равномерно на каждом компакте

$$|y(t) - a_0 t^{n-1} - ... - a_{n-1}| \le$$
$$\le \int_{t}^{+\infty} \int_{S_1}^{+\infty} ... \int_{S_{n-1}}^{+\infty} |\phi(S_n)| S_n^{\lambda(n-1)} c^{\lambda} ds_1 ... ds_n.$$

Из этого следует доказательство теоремы.

Доказательство закончено.

Следствие 1

При условиях теоремы 2 уравнение (1) имеет равномерно ограниченные решения с начальными данными $y(t_0) = y_0$,

$$y'(t_0) = (-1)^{n+1} \times$$

$$\times \int_{t_0}^{+\infty} \int_{S_1}^{+\infty} \dots \int_{S_{n-1}}^{+\infty} \phi(S_{n-1}) \,|\, y(S_{n-1}) \,|^{\lambda} \operatorname{sgn} y(s_{n-1}) ds_1 \dots ds_{n-1}$$

$$y^{(n-1)}(t_0) =$$

$$= -\int_{t_0}^{+\infty} \phi(S_{n-1}) \,|\, y(S_{n-1}) \,|^{\lambda} \operatorname{sgn} y(s_{n-1}) ds_1 \dots ds_{n-1},$$

удовлетворяющее данному условию $y(t_0) = y_0$. Справедливость следствия вытекает из теоремы 2 и теоремы 1 работы [5].

Следствие 2

Теорему 2 можно сформулировать в терминах асимптотической эквивалентности: уравнения (1–2) асимптотически эквивалентны по Брауеру, если выполняются условия теоремы 1 и

$$Y_j(\lambda) = \int_1^{+\infty} \int_{S_1}^{+\infty} \dots \int_{S_{j-1}}^{+\infty} |\, \phi(s_j) \,|\, s_j^{\lambda(n-1)} \alpha^{\lambda} ds_1 \dots ds_j$$

существует и интегрируема на любом компакте из $[\beta, +\infty)$ при всех $j = \overline{1, n}.$

Применим полученные результаты непосредственно к уравнению Эмдена-Фаулера:

$$u'' \pm t^{\sigma} u^n = 0, \qquad (7)$$

где $n = \dfrac{a}{b} > 1$, a – натуральное число, b – нечетное натуральное число. Уравнение (7) можно записать в виде системы:

$$\frac{dz}{dt} = Az \pm L(t, z), \qquad (8)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; L(t, z) = t^{\sigma} z_2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ u \end{pmatrix}.$$

Пусть $z = diag\{1, t\} e^A y$. Тогда уравнение (8) перейдет в уравнение

$$y' = t^{-1} \Lambda y \pm g(t, y), \qquad (9)$$

где $\Lambda = diag\{0, -1\}; g(t, y) =$

$$= e^{-A} diag\{1, t^{-1}\} \cdot R(t, diag(1, t) e^A y),$$

$$R(t, z) = \begin{pmatrix} t^{\sigma} z_2^n \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$\|g(t, y)\| \le c_1 t^{\sigma} t^n c_2 \,|\, y_2 \,|^n \le c t^{\sigma} z^{\sigma+n} \cdot \|y\|^n, \quad c > 0.$$

Для определенности в уравнении (9) примем знак плюс, в противном случае рассуждения будут аналогичными. Пусть $\sigma + n = -q$.

Теорема 3

Если $q > 2$, то уравнения (9) и

$$\frac{d\eta}{dt} = t^{-1} \Lambda \eta \qquad (10)$$

в некоторой окрестности нулевого решения $y = 0$ асимптотически эквивалентны по Брауеру относительно функции $\psi = t^{2-q}$ при $t \to +\infty$, то есть

$$y(t : t_0, y_0) = \eta(t : t_0, z_0) + o(t^{2-q}), \ t \ge t_0. \qquad (11)$$

Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы 2, поскольку в этом случае все условия выполняются. Действительно, асимптотическую формулу (11) запишем в следующем виде:

$$y(t : t_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} z_0 + o(t^{2-q}), \quad t \ge t_0.$$

Тогда

$$y(t : t_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} z_0 + o(t^{2-q}), \quad t \ge t_0,$$

то есть

$$z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} z_0 + o(t^{2-q}) \right], \ t \ge t_0 .$$

Тогда, если $c_1 = z_2^0, \ c_2 = z_1^0$, то $u^n = c_1^n + o(t^{2-q}) + t^n (c_2^n + o(t^{2-q})), \ t \ge t_0$.

Поэтому при малых c_1, c_2 получим:

$$u'(t) = c_2 - \int_t^{+\infty} s^\sigma u^n(s) ds =$$

$$= \frac{t^{\sigma+n+1}}{\sigma+n+1} (c_2^n + o(t^{2-q})) +$$

$$+ \frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1} (c_1^n + o(t^{2-q})) + c_1 + tc_2, \ \ t \ge t_0 ;$$

$$u(t) = \frac{t^{\sigma+n+2}}{(\sigma+n+2)(\sigma+n+1)} (c_2^n + o(t^{2-q})) +$$

$$+ \frac{t^{\sigma+2}}{(\sigma+2)(\sigma+1)} (c_1^n + o(t^{2-q})) +$$

$$+ c_1 + tc_2, \ t \ge t_0 . \qquad (12)$$

Доказательство закончено.

Обсуждение и заключения

На основании представленных в статье теорем и проведенного доказательства можно сделать вывод, что полученная асимптотическая формула (12) является более точной, чем соответствующие формулы Р. Беллмана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Chang Y., Mengroag Li.** A mathematical model of enterprise competitive ability and performance through Emden-Fowler equation for some enterprises // Acta Mathematica Scientia. 2015. Vol. 35 (5). P. 1014–1022. URL: http://manu45.magtech.com.cn/sxwlxbB/EN/Y2015/V35/I5/1014

2. **Беллман Р.** Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М. : Изд-во иностр. лит., 1954. 216 с.

3. **Chang Y., Mengroag Li.** A mathematical model of enterprise competitive ability and performance through Emden-Fowler equation (II) // Acta Mathematica Scientia. 2013. Vol. 33 (4). P. 1127–1140. URL: http://manu45.magtech.com.cn/sxwlxbB/EN/Y2013/V33/I4/1127

4. A mathematical model of enterprisecompetitive ability and performance through a particular Emden-Fowlerequation / Y. Chang [et al.] // Acta Mathematica Scientia. 2011. Vol. 31B (5). P. 1749–1764. URL: http://manu45.magtech.com.cn/sxwlxbB/EN/Y2011/V31/I5/1749

5. **Mengrong Li.** Blow-up results and asymptotic behavior of the Emden-Fowler equation u''=|u|p // Acta Mathematica Scientia. 2007. Vol. 27 (4). P. 703–734. URL: http://manu45.magtech.com.cn/sxwlxbB/EN/Y2007/V27/I4/703

6. **Muatjetjeja B., Khalique C. M.** Emden-Fowler type system: noether symmetries and first integrals // Acta Mathematica Scientia. 2012. Vol. 32 (5). P. 1959–1966. URL: http://manu45.magtech.com.cn/sxwlxbB/EN/Y2012/V32/I5/1959

7. **Самовол В. С.** О решениях уравнений типа Эмдена-Фаулера // Математические заметки. 2014. Т. 95, № 5. С. 77–789. URL: http://mi.mathnet.ru/rus/mz/v95/i5/p775

8. **Самовол В. С.** Об асимптотических оценках решений уравнений типа Эмдена–Фаулера // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 1. С. 103–114. URL: http://mi.mathnet.ru/rus/mz/v97/i1/p103

9. **Асташова И. В.** О колеблемости решений квазилинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера высокого порядка // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 6 (128). С. 12–22. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=24307586

10. **Мамедова Т. Ф., Черноиванова Е. А.** Исследование математических моделей электрических цепей методом асимптотической эквивалентности // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1-1. С. 1772. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=25325553

11. **Мамедова Т. Ф., Ляпина А. А.** Алгоритм исследования моделей нелинейной динамики // Известия высших учебных заведений: Поволжский регион: Физико-математические науки. 2013. № 3 (27). С. 48–57. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=21315164

12. **Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К.** Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15, № 2. С. 55–58. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=19832782

13. **Мамедова Т. Ф., Ляпина А. А.** Об исследовании динамических моделей социально-экономических систем на устойчивость по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12, № 4. С. 152–157. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=16035194

Поступила 31.05.2016; принята к публикации 16.06.2016; опубликована онлайн 30.12.2016

Об авторах:

Мамедова Татьяна Фанадовна, профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7582-216X**, mamedovatf@yandex.ru

Егорова Дарья Константиновна, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, **ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3392-6761**, egorovadk@mail.ru

Десяев Евгений Васильевич, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, **ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2583-6966**, desyaev@rambler.ru

Хесс Рамин, магистр экономического факультета Гёттингенского университета имени Георга-Августа (Германия, г. Гёттинген, ул. Вильгельмплац, д. 1), **ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6347-9528**, ramin.hess@stud.uni-goettingen.de

Вклад соавторов: Т. Ф. Мамедова сформулировала постановку задачи, доказала Теорему 1 и обобщила итоги реализации коллективного проекта; Д. К. Егорова сформулировала и доказала Теорему 2; Е. В. Десяев сформулировал и доказал Теорему 3; Р. Хесс сделал обзор литературы по зарубежным источникам, сформулировал следствие из Теоремы 2. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

REFERENCES

1. Chang Y, Mengroag Li. A mathematical model of enterprise competitive ability and performance through Emden-Fowler equation for some enterprises. Acta Mathematica Scientia. 2015; 35(5):1014-1022. Available from: http://manu45.magtech.com.cn/sxwlxbB/EN/Y2015/V35/I5/1014

2. Bellman R. Teoriya ustoychivosti resheniy differentsialnykh uravneniy [The theory of the stability of solutions of differential equations]. Moscow: Izdatelstvo inostrannoy literatury; 1954.

3. Chang Y, Mengroag Li. A mathematical model of enterprise competitive ability and performance through Emden-Fowler equation (II). Acta Mathematica Scientia. 2013; 33(4):1127-1140. Available from: http://manu45.magtech.com.cn/sxwlxbB/EN/Y2013/V33/I4/1127

4. Chang Y, Mengroag Li, Pai J, Chiu S. A mathematical model of enterprisecompetitive ability and performance through a particular Emden-Fowlerequation. Acta Mathematica Scientia. 2011; 31B(5):1749-1764. Available from: http://manu45.magtech.com.cn/sxwlxbB/EN/Y2011/V31/I5/1749

5. Mengrong Li. Blow-up results and asymptotic behavior of the Emden-Fowler equation u”=|u|p. Acta Mathematica Scientia. 2007; 27(4):703-734. Available from: http://manu45.magtech.com.cn/sxwlxbB/EN/Y2007/V27/I4/703

6. Muatjetjeja B, Khalique CM. Emden-Fowler type system: noether symmetries and first integrals. Acta Mathematica Scientia, 2012; 32(5):1959-1966. Available from: http://manu45.magtech.com.cn/sxwlxbB/EN/Y2012/V32/I5/1959

7. Samovol VS. O resheniyakh uravneniy tipa Emdena-Faulera [On solutions of Emden-Fowler-type equations]. *Matematicheskiye zametki* = Mathematical Notes. 2014; 5(95):775-789. Available from: http://mi.mathnet.ru/rus/mz/v95/i5/p775 (In Russ.)

8. Samovol VS. Ob asimptoticheskikh otsenkakh resheniy uravneniy tipa Emdena-Faulera [On the asymptotic estimates of solutions of Emden-Fowler type equations]. *Matematicheskiye zametki* = Mathematical Notes. 2015; 1(97):103-114. Available from: http://mi.mathnet.ru/rus/mz/v97/i1/p103 (In Russ.)

9. Astashova IV. O koleblemosti resheniy kvazilineynykh differentsialnykh uravneniy tipa Emdena-Faulera vysokogo poryadka [On oscillation of solutions to quasi-linear Emden-Fowler type higher-order differential equations]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* = Samara State University Bulletin. 2015; 6 (128):12-22. Available from: http://elibrary.ru/item.asp?id=24307586 (In Russ.)

10. Mamedova TF, Chernoivanova YeA. Issledovaniye matematicheskikh modeley elektricheskikh tsepey metodom asimptoticheskoy ekvivalentnosti [The study of mathematical models of electrical circuits using asymptotic equivalence]. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya* = Modern problems of science and education. 2015; 1-1:1772. Available from: http://elibrary.ru/item.asp?id=25325553 (In Russ.)

11. Mamedova TF, Lyapina AA. Algoritm issledovaniya modeley nelineynoy dinamiki [The algorithm of the nonlinear dynamics models study]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy: Povolzhskiy region: Fiziko-matematicheskiye nauki* = Higher Educational Institutions Bulletin. Volga region. Physics and mathematics. 2013; 3(27):48-57. Available from: http://elibrary.ru/item.asp?id=21315164 (In Russ.)

12. Mamedova TF, Yegorova DK. Ob asimptoticheskom ravnovesii nekotorykh ekonomicheskikh sistem [About asymptotic equilibrium of some economic systems]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* = Middle Volga Mathematical Society Bulletin. 2013; 2(15):55-58. Available from: http://elibrary.ru/item.asp?id=19832782 (In Russ.)

13. Mamedova TF, Lyapina AA. On the investigation of dynamic models of socio-economic sistems on the stability of some of the variables. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* = Middle Volga Mathe-matical Society Bulletin. 2010; 4(12):152-157. Available from: http://elibrary.ru/item.asp?id=16035194 (In Russ.)

Submitted 31.05.2016; revised 16.06.2016; published online 30.12.2016

About the authors:

Tatyana F. Mamedova, professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics chair, National Research Mordovia State University (68, Bolshevistskaya St., Saransk, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), docent, **ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7582-216X**, mamedovatf@yandex.ru

Darya K. Yegorova, docent of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics chair, National Research Mordovia State University, (68, Bolshevistskaya St., Saransk, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), **ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3392-6761**, egorovadk@mail.ru

Yevgeniy V. Desyayev, docent of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics chair, National Research Mordovia State University, (68, Bolshevistskaya St., Saransk, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), **ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2583-6966**, desyaev@rambler.ru

Ramin Hess, master of Economical faculty, University of Goettingen (1, Wilhelmplatz, Goettingen, Germany), **ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6347-9528**, ramin.hess@stud.uni-goettingen.de

The contribution of the authors: T. F. Mamedova formulated and proved Theorem 1 and summarized the results of the collective project; D. K. Yegorova formulated and proved the Theorem 2; Ye. V. Desyayev formulated and proved the Theorem 3; R. Hess gave an overview of the literature, formulated the corollary of Theorem 2. All authors have read and approved the final manuscript.