

ВЕСТНИК

МОРДОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 4. 2010



СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
НАУКИ

Основан в январе 1990 г.

Выходит один раз в квартал

№ 4

2010

Серия «Физико-математические науки»

ВЕСТНИК МОРДОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

НАУЧНО-ПУБЛИЦИСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Учредитель – Национальный исследовательский Мордовский
государственный университет им. Н. П. Огарева

*Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций
(Роскомнадзор), свидетельство ПИ № ФС77-8554 от 21 декабря 2009 года*

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

- Лавин С. В. Продолжение операции умножения в E_∞ -алгебрах до A_∞ -морфизма
 E_∞ -алгебр и картановские объекты в категории алгебр Мэн 4
- Лавин С. В. Гомотопическая инвариантность возмущений квантовых
дифференциальных модулей 9
- Ладоскин М. В. Структура A_∞ -модуля на кольцах многочленов 14
- Вритов А. В., Чудаев А. Э. Одна модель общей теории перспективы
Б. В. Раушенбаха 17
- Песков Р. Н., Щенников В. Н. Способ минимизации дизъюнктивных нормальных
форм булевых функций 26

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

- Шестаков А. А., Дружинина О. В. О развитии второго метода Ляпунова
качественного исследования в целом динамических систем 30
- Дружинина О. В., Шестаков А. А. О распространении метода Фроммера на
многомерные аналитические дифференциальные системы 35
- Дружинина О. В., Петрова С. Н. Существование колебательных режимов
динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями 39
- Александров А. Ю., Платонов А. В. Условия предельной ограниченности решений
одной дискретной модели динамики популяций с переключениями 42
- Зараник У. П., Жабко А. П. Об одном способе приближения области
асимптотической устойчивости дифференциально-разностных систем 46
- Афонин В. В. Вывод нелинейного объекта третьего порядка
на заданное движение 52

Афиногентова Е. В. Устойчивость состояния равновесия системы дифференциальных уравнений при решении численным методом Эйлера	34
Козлов М. В., Щенников В. Н. Равномерная ограниченность систем сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений	36
Лапшина Р. В. Асимптотические свойства решений функционально-дифференциальной системы	59
Никонов В. И. Об устойчивости линейных систем относительно части переменных	62
Лизина Е. А. Устойчивость движения относительно части переменных непрерывно-дискретной системы	66

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Шихаев К. Н. Теория и практика числовых рядов степеней и радикалов	69
Тактаров Н. Г., Миронова С. М. Математическое моделирование волн в слое жидкого диэлектрика на пористом основании	75
Федосин С. А., Ладяев Д. А., Марьина О. А. Анализ и сравнение методов обучения нейронных сетей	79
Гурченков А. А., Иванов И. М., Фесачко А. И. Управление вращающимися твердыми телами с жидким наполнением	89
Петрова Н. И. О методах оценки сочетаемости слов в моделях семантического предпочтения	93
Курносков Г. А., Пескова О. В. Применение метода вычислительного эксперимента при исследовании резонансной частоты колебаний спирального тела намота	98
Савкина А. В. Разработка системы хранения и поиска растровых изображений на основе вейвлет-преобразования, фрактального кодирования и смешанного подхода	104
Бакаева О. А. Определение минимального объема выборки	111
Базеева Н. А., Голечков Ю. И., Щенникова Е. В. О структуре пакета проблемно-ориентированных программ, используемых при математическом моделировании динамических систем транспорта	114
Лалтев Г. А., Батин В. В. Радиационно-защитные свойства металлобетонов при воздействии рентгеновских лучей	118
Матвиевский А. А., Емельянов Д. В., Юдин П. В. Оптимизация составов наполненных цементных композитов на активированной воде затворения	121
Пономарев А. А. О выборе параметров метода «предиктор – корректор»	124

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	133
--------------------------------------	-----

Главный редактор **С. М. Вдовин**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

*Шапкарин К. И. (зам. гл. ред.), Макаркин Н. П., Фомин Н. Е.,
Мартынова М. Д., Прытков Ю. Н., Сенин П. В., Лецацкий К. А.,
Арсентьев Н. М., Сидоркина Т. Н., Усанова А. А., Ерофеев В. Т., Ревин В. В.,
Ницев К. Н., Чучаев И. И., Мосин М. В., Сушкова Ю. Н., Гуляев И. В.,
Гуськова Н. Д., Ямашкин А. А., Ахметова А. М., Ломишн М. И.,
Буренина Н. В., Фомин А. П.*

Ответственный за номер: *Щенников В. Н.*

ПРОДОЛЖЕНИЕ ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ В E_∞ -АЛГЕБРАХ ДО A_∞ -МОРФИЗМА E_∞ -АЛГЕБР И КАРТАНОВСКИЕ ОБЪЕКТЫ В КАТЕГОРИИ АЛГЕБР МЭЯ*

С. В. Лапин

В работе получен положительный ответ на указанный выше открытый вопрос о картановских объектах в категории алгебр Мэя. Получено новое доказательство формулы Картана для операций Стиррода в гомологиях произвольных E_∞ -алгебр.

В работе [6] при изучении алгебраической природы возникновения операций Стиррода в гомологиях топологических пространств Мэй определил категорию, объектами которой являются дифференциальные модули, снабженные некоторым специальным действием резольвенты симметрической группы. Главным свойством объектов этой категории, которые называются алгебрами Мэя, является то, что на их гомологиях всегда имеется функториальное действие операций Стиррода. Для того чтобы операции Стиррода в гомологиях алгебр Мэя имели свойства, аналогичные свойствам операций Стиррода в гомологиях топологических пространств, в [6] были введены понятия адемовского объекта и картановского объекта в категории алгебр Мэя. Более того, в [6] было показано, что для операций Стиррода в гомологиях адемовских алгебр Мэя справедливы соотношения Адема, а для операций Стиррода в гомологиях картановских алгебр Мэя имеет место формула Картана.

С другой стороны, в работе Смирнова [2] было введено понятие E_∞ -алгебры в категории дифференциальных модулей, являющееся гомотопически инвариантным аналогом понятия ассоциативной и коммутатив-

ной дифференциальной алгебры. По своему определению структура E_∞ -алгебры, заданная на дифференциальном модуле, каноническим образом определяет на этом дифференциальном модуле структуру адемовской алгебры Мэя. Таким образом, операции Стиррода в гомологиях произвольной E_∞ -алгебры удовлетворяют соотношениям Адема. В работе [5] Чатаур и Ливернет при помощи свойства кофибрантной порожденности категории E_∞ -алгебр показали, что для операций Стиррода в гомологиях любой E_∞ -алгебры справедлива формула Картана. Однако вопрос о том, является ли алгебра Мэя, происходящая из произвольной E_∞ -алгебры, картановским объектом в категории алгебр Мэя, остался открытым.

В данной статье при помощи гомотопической теории E_∞ -коалгебр из работы Смирнова [3] показано, что операция умножения $\cup : X \otimes X \rightarrow X$ в произвольной E_∞ -алгебре продолжается до A_∞ -морфизма из E_∞ -алгебры $X \otimes X$ в E_∞ -алгебру X . Как следствие получено, что каждая алгебра Мэя, происходящая из произвольной E_∞ -алгебры, является картановским объектом в категории алгебр Мэя. Другими словами, в работе получен положительный ответ на указанный выше от-

© С. В. Лапин, 2010

* Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации «Ведущие научные школы» (НШ-1562.2008.1).

крытый вопрос о картановских объектах в категории алгебр Мэя и, следовательно, получено новое по сравнению с [5] доказательство формулы Картана для операций Огирода в гомологиях произвольных E_∞ -алгебр. Перейдем теперь к строгим определениям и формулировкам.

Напомним сначала для введения терминологии и обозначений необходимые определения и конструкции, связанные с понятиями операды и алгебры над операдой из работ [2–4].

Симметрическим семейством $\mathcal{E} = \mathcal{E}(j)_{j \geq 1}$ называется любое семейство дифференциальных градуированных Σ_j -модулей $\mathcal{E}(j)$, где Σ_j – симметрическая группа степени j . Морфизмом симметрических семейств $f: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$ называется произвольное семейство Σ_j -эквивариантных отображений дифференциальных градуированных модулей $f = \{f(j): \mathcal{E}'(j) \rightarrow \mathcal{E}''(j)\}_{j \geq 1}$.

Для заданных симметрических семейств $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$ рассмотрим симметрическое семейство $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'' = (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j)_{j \geq 1}$, где $(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j)$ – фактор-модуль Σ_j -свободного дифференциального градуированного модуля, порожденного дифференциальным градуированным модулем

$$\sum_{j_1 + \dots + j_k = j} \mathcal{E}'(k) \otimes \mathcal{E}''(j_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{E}''(j_k),$$

по отношению эквивалентности $\sim$, которое определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x' \sigma \otimes x_1'' \otimes \dots \otimes x_k'' &\sim \\ &\sim x' \otimes x_{\sigma^{-1}(1)}'' \otimes \dots \otimes x_{\sigma^{-1}(k)}'' \sigma(j_1, \dots, j_k), \\ x' \otimes x_1' \sigma_1 \otimes \dots \otimes x_k' \sigma_k &\sim \\ &\sim x' \otimes x_1'' \otimes \dots \otimes x_k'' (\sigma_1 \times \dots \times \sigma_k). \end{aligned}$$

Здесь $\sigma(j_1, \dots, j_k)$ – перестановка j элементов, получающаяся при разбиении множества из j элементов на k блоков по $j_1, \dots, j_k$ элементов и воздействием на эти блоки перестановкой σ , а $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_k$ – образ элемента $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ при вложении $\Sigma_{j_1} \oplus \dots \oplus \Sigma_{j_k} \rightarrow \Sigma_j$. Ясно, что рассмотренное $\times$ -произведение ассоциативно, т. е. для произвольных симметрических семейств $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$ имеется изоморфизм $\mathcal{E} \times (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'') \approx (\mathcal{E} \times \mathcal{E}') \times \mathcal{E}''$ в категории симметрических семейств.

Операдой $(\mathcal{E}, \pi)$ называется симметрическое семейство $\mathcal{E} = \mathcal{E}(j)_{j \geq 1}$, рассматривае-

мое вместе с морфизмом симметрических семейств $\pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, для которого выполнено условие $\pi(\pi \times 1) = \pi(1 \times \pi)$. Морфизм симметрических семейств $\pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ называется умножением операды $(\mathcal{E}, \pi)$. Морфизмом операд $f: (\mathcal{E}', \pi') \rightarrow (\mathcal{E}'', \pi'')$ называется морфизм симметрических семейств $f: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$, для которого выполнено условие $f\pi' = \pi''(f \times f)$.

Операда $(\mathcal{E}, \pi)$ называется свободной, если эта операда, рассматриваемая как градуированная операда, т. е. рассматриваемая без дифференциала, является свободным объектом в категории градуированных операд. Операда $(\mathcal{E}, \pi)$ называется Σ -свободной (соответственно ациклической), если для каждого $j \geq 1$ дифференциальный градуированный модуль $\mathcal{E}(j)$ является Σ_j -свободным (соответственно ациклическим).

Одной из важнейших операд в алгебраической топологии является построенная в работе [2] операда (E_∞, π) . По своему построению операда (E_∞, π) является свободной, Σ -свободной и ациклической операдой. Например, дифференциальный градуированный модуль $E_\infty(2)$ является Σ_2 -свободным ациклическим цепным комплексом с образующими $\cup_i \in E_\infty(2)$ размерности $i \geq 0$ и дифференциалом

$$d(\cup_i) = \cup_{i-1} + (-1)^i \cup_{i-1} T, \quad T \in \Sigma_2.$$

Напомним теперь понятие алгебры над операдой. Пусть заданы произвольный дифференциальный градуированный модуль X и некоторое симметрическое семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$. Рассмотрим дифференциальный градуированный модуль

$$\mathcal{E} \times X = \bigoplus_{j \geq 1} \mathcal{E}(j) \otimes_{\Sigma_j} X^{\otimes j},$$

где симметрическая группа Σ_j действует на $X^{\otimes j}$ перестановками сомножителей в тензорном произведении с обычным соглашением о знаках. Легко видеть, что для любых симметрических семейств $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$ и любого дифференциального градуированного модуля X имеет место изоморфизм $\mathcal{E}' \times (\mathcal{E}'' \times X) \approx (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'') \times X$ в категории дифференциальных градуированных модулей.

Алгеброй над операдой $(\mathcal{E}, \pi)$, или просто $\mathcal{E}$ -алгеброй, называется дифференциальный градуированный модуль X , рассматриваемый вместе с фиксированным отображением дифференциальных градуированных модулей $\mu: \mathcal{E} \times X \rightarrow X$, для которого выпол-

нено условие $\mu(\pi \times 1) = \mu(1 \times \mu)$. Отображением $\mathcal{E}$ -алгебр $f : (X', \mu') \rightarrow (X'', \mu'')$ называется отображение дифференциальных градуированных модулей $f : X' \rightarrow X''$, удовлетворяющее условию $\mu''(1 \times f) = f\mu'$.

В работе [2] при помощи метода ациклических моделей было показано, что на сингулярном коцепном комплексе $C^*(X)$ любого топологического пространства X имеется естественная структура E_∞ -алгебры $\mu : E_\infty \times C^*(X) \rightarrow C^*(X)$, удовлетворяющая условию $\mu(\cup_0) = \cup$, где $\cup_0 \in E_\infty(2)_0$ и $\cup : C^*(X) \otimes C^*(X) \rightarrow C^*(X)$ — умножение в коцепном комплексе $C^*(X)$, индуцированное диагональным отображением топологических пространства $X \rightarrow X \times X$. Кроме того, в [2] было показано, что любое непрерывное отображение топологических пространств $f : X \rightarrow Y$ индуцирует отображение E_∞ -алгебр $C^*(f) : C^*(Y) \rightarrow C^*(X)$.

A_∞ -морфизмом $f : X \rightarrow Y$ алгебр над операдом $(\mathcal{E}, \pi)$ называется семейство отображений $f = \{f_n : \mathcal{E}^{\times n} \times X \rightarrow Y \mid f_n((\mathcal{E}^{\times n} \times X)_*) \subseteq Y_{*+n}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$, которые для каждого целого числа $n \geq -1$ удовлетворяют соотношению

$$df_{n+1} + (-1)^n f_{n+1}d = (-1)^n \mu(1 \times f_n) - f_n(1 \times \dots \times 1 \times \mu) + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} f_n(1 \times \dots \times 1 \times \pi \times 1 \times \dots \times 1 \times 1),$$

где i — номер места, на котором стоит π .

Легко видеть, что каждое отображение $\mathcal{E}$ -алгебр $f : X \rightarrow Y$ можно считать A_∞ -морфизмом $\mathcal{E}$ -алгебр $\{f_n\} : X \rightarrow Y$, если положить $f_0 = f$ и $f_n = 0, n > 0$.

Гомотопией $h : X \rightarrow Y$ между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр $f, g : X \rightarrow Y$ называется семейство отображений $h = \{h_n : (\mathcal{E}^{\times n} \times X)_* \rightarrow Y_{*+n+1} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$, которые для каждого целого числа $n \geq -1$ удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} dh_{n+1} + (-1)^{n+1} h_{n+1}d = \\ = f_{n+1} - g_{n+1} + h_n(1 \times \dots \times 1 \times \mu) + \\ + (-1)^n \mu(1 \times h_n) + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n+1} h_n(1 \times \dots \times 1 \times \pi \times 1 \times \dots \times 1 \times 1), \end{aligned}$$

где i — номер места, на котором стоит π .

При помощи понятия гомотопии между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр стандартно определяется понятие A_∞ -гомотопической эквивалентности $\mathcal{E}$ -алгебр.

Пусть заданы A_∞ -морфизмы $\mathcal{E}$ -алгебр $\eta : X \rightarrow Y : \xi$, для которых выполнено условие $\eta\xi = 1_Y$, и пусть задана некоторая гомотопия $h : X \rightarrow X$ между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр 1_X и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi = 0, \eta h = 0, hh = 0$. Рассмотренная ситуация традиционно записывается в виде $(\eta : X \rightarrow Y : \xi, h)$ и называется A_∞ -SDR-ситуацией $\mathcal{E}$ -алгебр.

Напомним, что операда (E_∞, π) является операдом Хопфа [2], т. е. для операды (E_∞, π) в категории симметрических семейств имеется ассоциативное коумножение $\nabla : E_\infty \rightarrow E_\infty \otimes E_\infty$, где $(E_\infty \otimes E_\infty)(j) = E_\infty(j) \otimes E_\infty(j)$, $j \geq 1$, которое является морфизмом операда. При помощи этого коумножения ∇ определяется тензорное произведение $(X \otimes Y, \mu)$ произвольных E_∞ -алгебр (X, μ') и (Y, μ'') со структурным отображением $\mu : E_\infty \times (X \otimes Y) \rightarrow X \otimes Y$, которое задается формулой $\mu = (\mu' \otimes \mu'')T(\nabla \times 1)$, где $T : (E_\infty \otimes E_\infty) \times (X \otimes Y) \rightarrow (\times X) \otimes (E_\infty \times Y)$ — очевидное перестановочное отображение.

Рассмотрим теперь для произвольной E_∞ -алгебры (X, d, μ) дифференциальную алгебру $(X, d, \cup)$, операция умножения $\cup : (X \otimes X)_* \rightarrow X_*$ которой задается формулой $\cup = \mu(\cup_0 \otimes 1_X \otimes 1_X)$, где $\cup_0 \in E_\infty(2)_0$. Так как в операде (E_∞, π) имеется соотношение $d(\cup_1) = \cup_0 - \cup_0 T$, где $\cup_1 \in E_\infty(2)_1, T \in \Sigma_2$, то операция умножения $\cup$ является гомотопически коммутативной. Кроме того, операция умножения $\cup$ является гомотопически ассоциативной, поскольку в операде (E_∞, π) содержится [2] подоперада Стиенсффа (A_∞, π) и, следовательно, в операде (E_∞, π) имеется соотношение

$$d(\pi_1) = \pi(\cup_0 \otimes \cup_0 \otimes 1) - \pi(\cup_0 \otimes 1 \otimes \cup_0),$$

где $\pi_1 \in A_\infty(3)_1 \subset E_\infty(3)_1$. Отметим теперь, что если для произвольной E_∞ -алгебры (X, μ) рассмотреть соответствующую ей E_∞ -алгебру $(X \otimes X, \mu)$, то операция умножения $\cup : (X \otimes X)_* \rightarrow X_*$, вообще говоря, не является отображением E_∞ -алгебр. Однако, как показывает следующее утверждение, для любых E_∞ -алгебр, заданных над полем $\mathbb{Z}_2$, операцию умножения $\cup$ всегда можно продолжить до A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр.

Теорема. Для каждой E_∞ -алгебры (X, μ) , заданной над полем $\mathbb{Z}_2$, существует A_∞ -морфизм E_∞ -алгебр $\psi = \{\psi_n : (E_\infty^{\times n} \times X^{\otimes 2})_* \rightarrow X_{*+n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$, начальная компонента $\psi_0 : (X \otimes X)_* \rightarrow$

то X , которого совпадает с операцией умножения $\cup = \mu(\cup_0 \otimes 1_X^{\otimes 2}) : (X \otimes X)_* \rightarrow X_*$.

Доказательство. Напомним сначала, что в работе [3] для любой E_∞ -алгебры X , заданной над полем $\mathbb{Z}_2$, функториальным образом была построена симплициальная коммутативная коалгебра $F(X)$, обладающая тем свойством, что соответствующая ей E_∞ -алгебра $N^*(F(X))$ нормализованных коцепей с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ и исходная E_∞ -алгебра X являются A_∞ -гомотопически эквивалентными E_∞ -алгебрами. Так как симплициальная коалгебра $F(X)$ коммутативна, то коумножение $\nabla : F(X) \rightarrow F(X)^{\otimes 2}$ этой симплициальной коалгебры является отображением симплициальных коалгебр и, следовательно, индуцирует отображение E_∞ -алгебр $N^*(\nabla) : N^*(F(X)^{\otimes 2}) \rightarrow N^*(F(X))$. В [2] (см. также [1]) было показано, что отображение Эйленберга-Зильбера $\psi : N^*(F(X))^{\otimes 2} \rightarrow N^*(F(X)^{\otimes 2})$, являющееся гомотопической эквивалентностью дифференциальных модулей, можно продолжить до A_∞ -гомотопической эквивалентности E_∞ -алгебр

$$\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_n\} : N^*(F(X))^{\otimes 2} \rightarrow N^*(F(X)^{\otimes 2}),$$

$$\bar{\psi}_0 = \psi.$$

Из этого следует, что для E_∞ -алгебры $(N^*(F(X)), \mu)$ операция ассоциативного умножения

$$\cup = \mu(\cup_0 \otimes 1 \otimes 1) = N^*(\nabla)\psi : N^*(F(X))^{\otimes 2} \rightarrow N^*(F(X))$$

продолжается до A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр

$$\gamma = N^*(\nabla)\bar{\psi} = \{\gamma_n\} : N^*(F(X))^{\otimes 2} \rightarrow N^*(F(X)), \quad \gamma_0 = \cup.$$

Пусть A_∞ -морфизмы E_∞ -алгебр $f = \{f_n\} : X \rightrightarrows N^*(F(X)) : \{g_n\} = g$ являются взаимнообратными A_∞ -гомотопически эквивалентностями E_∞ -алгебр над полем $\mathbb{Z}_2$. Тогда легко видеть, что имеет место соотношение $dt + td = \cup(f_0 \otimes f_0) + f_0 \cup$, где $t = f_1(\cup_0 \otimes 1 \otimes 1)$, $\cup = \mu(\cup_0 \otimes 1 \otimes 1)$, и, следовательно, справедливо соотношение $dh + hd = g_0(\cup(f_0 \otimes f_0)) + \cup$, где $h = g_0 t + a \cup$ и $ds + sd = 1_X + g_0 f_0$. Таким образом, имеется морфизм A_∞ -морфизм E_∞ -алгебр

$$\xi = g\gamma(f \otimes f) = \{\xi_n\} : X \otimes X \rightarrow X,$$

$$\xi_0 = g_0(\cup(f_0 \otimes f_0)),$$

для которого выполнено равенство $dh + hd = \xi_0 + \cup$, т. е. отображения дифференциальных модулей $\xi_0 : X^{\otimes 2} \rightarrow X$ и $\cup : X^{\otimes 2} \rightarrow X$ являются гомотопными. Покажем, что в этой ситуации отображение дифференциальных модулей $\cup : X^{\otimes 2} \rightarrow X$ продолжается до A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр $\psi = \{\psi_n\} : X^{\otimes 2} \rightarrow X$, $\psi_0 = \cup$ и, кроме того, имеется гомотопия $\tau = \{\tau_n\}$, $\tau_0 = h$, между A_∞ -морфизмами E_∞ -алгебр $\xi = \{\xi_n\} : X^{\otimes 2} \rightarrow X$ и $\psi = \{\psi_n\} : X^{\otimes 2} \rightarrow X$. Определим семейства отображений $\psi = \{\psi_n : (E_\infty^{X^n} \times X^{\otimes 2})_* \rightarrow X_{*+n}\}$ и $\tau = \{\tau_n : (E_\infty^{X^n} \times X^{\otimes 2})_* \rightarrow X_{*+n+1}\}$, полагая

$$\psi_0 = \cup, \quad \psi_1 = \xi_1 + h\mu + \mu(1 \times h), \quad \psi_n = \xi_n, \quad n \geq 2,$$

$$\tau_0 = h, \quad \tau_n = 0, \quad n \geq 1.$$

Прямые вычисления показывают, что семейство отображений $\psi = \{\psi_n\}$ является A_∞ -морфизмом E_∞ -алгебр и семейство отображений $\tau = \{\tau_n\}$ является гомотопией между A_∞ -морфизмами E_∞ -алгебр $\xi = \{\xi_n\}$ и $\psi = \{\psi_n\}$. Таким образом, для любой E_∞ -алгебры (X, μ) , заданной над полем $\mathbb{Z}_2$, операция умножения $\cup = \mu(\cup_0 \otimes 1 \otimes 1) : X^{\otimes 2} \rightarrow X$ продолжается до A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр $\{\psi_n\} : X^{\otimes 2} \rightarrow X$, $\psi_0 = \cup$.

Рассмотрим теперь категорию $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя. Эта категория была введена в работе [6] как подкатегория категории дифференциальных модулей, на гомологиях объектов которой естественным образом действуют операции Стирлинга.

Напомним, что $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгеброй Мэя называется пара (X, ϑ) , где X — произвольный дифференциальный модуль над полем $\mathbb{Z}_2$ и $\vartheta : E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} X^{\otimes 2} \rightarrow X$ — отображение дифференциальных модулей, для которого индуцированное отображение $\cup = \vartheta(\cup_0 \otimes 1_X^{\otimes 2}) : X^{\otimes 2} \rightarrow X$ является гомотопически ассоциативным умножением на дифференциальном модуле X . Здесь считается, что группа Σ_2 действует на $X^{\otimes 2}$ перестановкой сомножителей в тензорном произведении. Морфизмами $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя $f : (X, \vartheta') \rightarrow (Y, \vartheta'')$ называются отображения дифференциальных модулей $f : X \rightarrow Y$, для которых отображения $\vartheta''(1 \otimes f^{\otimes 2})$ и $f\vartheta'$ являются гомотопными отображениями дифференциальных модулей.

Легко видеть, что каждая E_∞ -алгебра (X, μ) , заданная над полем $\mathbb{Z}_2$, имеет структуру $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебры Мэя (X, ϑ) , где структурное отображение дифференциальных модулей $\vartheta : E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} X^{\otimes 2} \rightarrow X$ определяется

как ограничение отображения дифференциальных модулей $\mu : E_\infty \times X \rightarrow X$ на подмодуль $E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} X^{\otimes 2}$ дифференциального модуля $E_\infty \times X$.

Напомним теперь, что тензорным произведением $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя (X, ϑ') и (Y, ϑ'') называется $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя $(X \otimes Y, \vartheta)$, структурное отображение $\vartheta : E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} (X \otimes Y)^{\otimes 2} \rightarrow X \otimes Y$ которой определяется равенством

$$\vartheta = (\vartheta' \otimes \vartheta'')(1 \otimes T \otimes 1)(\nabla \otimes U),$$

где $U : (X \otimes Y)^{\otimes 2} \rightarrow X^{\otimes 2} \otimes Y^{\otimes 2}$, $T : E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} X^{\otimes 2} \rightarrow X^{\otimes 2} \otimes_{\Sigma_2} E_\infty(2)$ — очевидные перестановочные отображения и $\nabla : E_\infty(2) \rightarrow E(2) \otimes E_\infty(2)$ — ограничение указанного выше морфизма операд $\nabla : E_\infty \rightarrow E_\infty \otimes E_\infty$ на дифференциальный градуированный Σ_2 -модуль $E_\infty(2)$. В частности, для каждой $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебры Мэя (X, ϑ') определена $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя $(X^{\otimes 2}, \vartheta)$.

Картановским объектом категории $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя называется произвольная $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя (X, ϑ) , операция умножения $\cup = \vartheta(\cup_0 \otimes 1_X^{\otimes 2}) : X^{\otimes 2} \rightarrow X$ которой является морфизмом $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя.

Следствие 1. Для произвольной E_∞ -алгебры (X, μ) , заданной над полем $\mathbb{Z}_2$, соответствующая ей $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя (X, ϑ) является картановским объектом категории $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя.

Доказательство. В теореме для произвольной E_∞ -алгебры (X, μ) был построен A_∞ -морфизм E_∞ -алгебр $\psi = \{\psi_n : (E_\infty^{\otimes n} \times X^{\otimes 2})_* \rightarrow X_{*+n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$, начальная компонента $\psi_0 : (X \otimes X)_* \rightarrow X_*$ которого совпадает с операцией умножения $\cup = \mu(\cup_0 \otimes 1_X^{\otimes 2}) : (X \otimes X)_* \rightarrow X_*$. Из соотношений в определении A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр получаем, что для компоненты $\psi_1 : (E_\infty \times X^{\otimes 2})_* \rightarrow X_{*+1}$ имеет место равенство $d\psi_1 + \psi_1 d = \mu(1 \times \cup) - \cup(1 \times \mu)$. Если определить теперь отображение $h : (E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} (X^{\otimes 2} \otimes X^{\otimes 2}))_* \rightarrow X_{*+1}$ как ограничение отображения ψ_1 на подмодуль $E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} (X^{\otimes 2} \otimes X^{\otimes 2})$ дифференциального градуированного модуля $E_\infty \times X^{\otimes 2}$, то для $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя (X, ϑ) и $(X^{\otimes 2}, \vartheta)$, которые соответствуют E_∞ -алгебрам (X, μ) и $(X^{\otimes 2}, \mu)$, получим равенство $dh + hd = \vartheta(1 \otimes \cup^{\otimes 2}) - \cup\vartheta$. Это равенство означает, что h является гомотопией между отображениями $\vartheta(1 \otimes \cup^{\otimes 2})$ и $\cup\vartheta$ и, следовательно, операция умножения

$\cup = \vartheta(\cup_0 \otimes 1_X^{\otimes 2}) : (X^{\otimes 2}, \vartheta) \rightarrow (X, \vartheta)$ является морфизмом $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя. Таким образом, $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя (X, ϑ) , соответствующая E_∞ -алгебре (X, μ) , является картановским объектом категории $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя.

Напомним теперь конструкцию операций Стиррода в гомологиях $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя и, в частности, в гомологиях E_∞ -алгебр. Пусть задана произвольная $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя (X, ϑ) , которую будем рассматривать с верхней градуировкой, полагая $X^k = X_{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Образующие $\cup_n \in E_\infty(2)_n$, $n \geq 0$, дифференциального $\mathbb{Z}_2[\Sigma_2]$ -модуля $E_\infty(2)$ определяют отображения

$$\cup_n = \vartheta(\cup_n \otimes 1_X^{\otimes 2}) : (X \otimes X)^* \rightarrow X^{*-n}, \quad n \geq 0,$$

связанные между собой соотношениями $d(\cup_n) = \cup_{n-1} + (-1)^n \cup_{n-1} T$, $n \geq 1$, $d(\cup_0) = 0$. Операция гомотопически коммутативного и гомотопически ассоциативного умножения $\cup = \cup_0 : (X \otimes X)^* \rightarrow X^*$ индуцирует на гомологическом модуле $H(X)$ коммутативное и ассоциативное умножение $\cup : H(X) \otimes H(X) \rightarrow H(X)$. Кроме этого умножения, указанные выше отображения $\cup_n$, $n \geq 0$ определяют естественные по аргументу X отображения $\mathbb{Z}_2$ -модулей

$$Sq^n : H^*(X) \rightarrow H^{*+n}(X), \quad n \geq 0,$$

$$Sq^n\{x\} = \{x \cup_{q-n} x\},$$

где $x \in X^q$ и через $\{x\}$, $\{x \cup_{q-n} x\}$ обозначены соответствующие классы гомологий циклов x и $x \cup_{q-n} x$. Отображения $\mathbb{Z}_2$ -модулей Sq^n , $n \geq 0$ называются операциями Стиррода в гомологиях $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебры Мэя (X, ϑ) . Операциями Стиррода в гомологиях E_∞ -алгебры (X, μ) называются операции Стиррода в гомологиях $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебры Мэя (X, ϑ) , которая соответствует E_∞ -алгебре (X, μ) . В [6] было показано, что если $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя X является картановским объектом категории $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя, то для операций Стиррода $Sq^n : H^*(X) \rightarrow H^{*+n}(X)$ в гомологиях $H^*(X)$ этой $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебры Мэя справедлива формула Картана. Из этого, применяя следствие 1, получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Для операций Стиррода $Sq^n : H^*(X) \rightarrow H^{*+n}(X)$ в гомологиях $H^*(X)$ любой E_∞ -алгебры (X, μ) , заданной над полем $\mathbb{Z}_2$, справедлива формула Картана $Sq^n(x \cup y) = \sum_{i+j=n} Sq^i(x) \cup Sq^j(y)$, $x, y \in H^*(X)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лапин С. В. D_∞ -дифференциальные E_∞ -алгебры и спектральные последовательности расщеплений / С. В. Лапин // Мат. сб. – 2007. – Т. 198, № 10. – С. 3–30.
2. Смирнов В. А. О коцепном комплексе топологического пространства / В. А. Смирнов // Мат. сб. – 1981. – Вып. 115, № 1. – С. 146–153.
3. Смирнов В. А. Гомотопическая теория коалгебр / В. А. Смирнов // Изв. АН СССР. Сер. Математика. – 1985. – Т. 49, № 6. – С. 1302–1321.
4. Смирнов В. А. Гомологии B -конструкций и ко- B -конструкций / В. А. Смирнов // Изв. РАН. Сер. Математика. – 1994. – Т. 58, № 4. – С. 80–96.
5. Chataur D. Operadic description of Steenrod operations / D. Chataur, M. Livernet // arXiv: math.AT/020936. – 2002. – Vol. 2, № 25. – P. 1–27.
6. May J. P. A general algebraic approach to Steenrod operations / J. P. May // Lect. Notes in Math. – 1970. – Vol. 168. – P. 153–231.

Поступила 28.10.10.

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ВОЗМУЩЕНИЙ КВАНТОВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ*

С. В. Лапин

В данной работе вводится понятие возмущения квантового дифференциального модуля и устанавливается свойство гомотопической инвариантности возмущений квантовых дифференциальных модулей.

В работах Гутенхейма, Ламбе, Стасеффа [1–4] было введено понятие «возмущения дифференциального модуля» и установлено свойство гомотопической инвариантности возмущений дифференциальных модулей. С другой стороны, в работе [1] было введено понятие квантового дифференциального модуля или, по-другому, D_∞ -дифференциального модуля, которое является гомотопически инвариантным аналогом понятия дифференциального модуля, а также рассмотрена связь между понятиями возмущения дифференциального модуля и квантового дифференциального модуля.

Пусть K – любое коммутативное кольцо с единицей. Все рассматриваемые ниже модули и отображения модулей являются, если не оговорены дополнительные условия, K -модулями и отображениями K -модулей.

Напомним сначала, что дифференциальным модулем (X, d) называется модуль X , рассматриваемый вместе с некоторым фиксированным отображением модулей $d: X \rightarrow X$, которое называется дифференциалом модуля X и для которого выполнено условие $d^2 = dd = 0$. Отображением $f: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ дифференциальных модулей называется отображение модулей $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $df = fd$. Гомотопией между отображениями $f, g: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ дифференциальных модулей называется отображение модулей $h: X \rightarrow Y$, для которого выполнено равенство $dh + hd = f - g$. При помощи понятия гомотопии между отображениями дифференциальных модулей стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности дифференциальных модулей.

© С. В. Лапин, 2010

* Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.» проекта «Построение гомотопически устойчивого аналога симплектического объекта».

Возмущением дифференциального модуля (X, d) называется отображение модулей $t : X \rightarrow X$, для которого пара $(X, d + t)$ является дифференциальным модулем, т. е. для отображения модулей $d + t : X \rightarrow X$ выполнено условие $(d + t)^2 = 0$. Легко видеть, что это условие эквивалентно условию $dt + td = -t^2$.

Напомним теперь [4], что квантовым дифференциальным модулем X называется семейство отображений модулей $\{d^i : X \rightarrow X \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$, которые для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^i d^j = 0. \quad (1)$$

Квантовым дифференциальным модулем (X, d^i) называется произвольный модуль X , рассматриваемый вместе с некоторым фиксированным квантовым дифференциалом $\{d^i : X \rightarrow X\}$ этого модуля.

Рассмотрим соотношения (1) для малых значений $k \geq 0$. При $k = 0$ соотношение (1) имеет вид

$$d^0 d^0 = 0.$$

Это говорит о том, что пара (X, d^0) является дифференциальным модулем. При $k = 1$ соотношение (1) принимает вид

$$d^1 d^0 + d^0 d^1 = 0.$$

Другими словами, отображения d^0 и d^1 являются антикоммутирующими. Из этого следует, что композиция $d^1 d^1 : X \rightarrow X$ является эндоморфизмом дифференциального модуля (X, d^0) . При $k = 2$ соотношение (1) записывается в виде

$$d^0 d^2 + d^2 d^0 = 0 - d^1 d^1$$

Это означает, что отображение модулей $d^2 : X \rightarrow X$ является гомотопией между нулевым отображением дифференциальных модулей и отображением дифференциальных модулей $d^1 d^1 : (X, d^0) \rightarrow (X, d^0)$. Таким образом, отображение модулей $d^1 : X \rightarrow X$ является дифференциалом с точностью до гомотопии.

Простыми нетривиальными примерами квантовых дифференциальных модулей служат модули, которые снабжены двумя антикоммутирующими дифференциалами. В самом деле, если задан произвольный модуль X с двумя антикоммутирующими дифференциалами $d', d'' : X \rightarrow X$, то определен квантовый дифференциальный модуль (X, d^i) , где $d^0 = d'$, $d^1 = d''$ и $d^i = 0$, $i \geq 2$.

Многочисленные примеры квантовых дифференциальных модулей можно получить отталкиваясь от конструкции дифференциального модуля с фильтрацией. Пусть над произвольным полем задан дифференциальный модуль (X, d) с возрастающей фильтрацией $\{X^n\}$, $n \geq 0$. Обозначим через Y^n подмодуль модуля X^n , для которого $X^n = Y^n \oplus X^{n-1}$. При помощи условия $d(X^n) \subseteq X^n$ определим отображение $d_n^i : Y^n \rightarrow Y^{n-i}$, $i \geq 0$ как компоненту дифференциала

$$d : Y^n \rightarrow X^n = Y^n \oplus \dots \oplus Y^{n-1} \oplus \dots \oplus Y^0.$$

Легко видеть, что семейство отображений $\{d^i = \bigoplus_{n \geq 0} d_n^i : X \rightarrow X \mid i \geq 0\}$ является квантовым дифференциалом модуля X , поскольку условие $d^2 = 0$ в рассматриваемом случае эквивалентно соотношениям (1).

Морфизмом квантовых дифференциальных модулей $f : (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ называется семейство отображений модулей $f = \{f^i : X \rightarrow Y \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geq 0$ следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} f^i d^j = \sum_{i+j=k} d^i f^j \quad (2)$$

Рассмотрим соотношения (2) для начальных значений $k \geq 0$. При $k = 0$ соотношение (2) имеет вид

$$f^0 d^0 = d^0 f^0,$$

т. е. определено отображение дифференциальных модулей $f^0 : (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$. При $k = 1$ соотношение (2) записывается в виде $f^0 d^1 - d^1 f^0 = d^0 f^1 - f^1 d^0$. Это означает, что отображение $f^1 : X \rightarrow Y$ служит гомотопией между нулевым отображением и отображением $f^0 d^1 - d^1 f^0 : (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$, которое антикоммутирует с дифференциалом. Другими словами, отображение f^0 относительно d^1 является с точностью до гомотопии отображением дифференциальных модулей.

Композиция морфизмов $f = \{f^i\} : X \rightarrow Y$ и $g = \{g^i\} : Y \rightarrow Z$ квантовых дифференциальных модулей определяется формулой

$$(gf)^i = \sum_{n+m=i} g^n f^m : X \rightarrow Z, \quad i \geq 0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что семейство отображений модулей

$gf = \{(gf)^i\}$ является морфизмом квантовых дифференциальных модулей. Легко также проверяется, что операция композиции морфизмов квантовых дифференциальных модулей ассоциативна. Тожественным морфизмом $1_X = \{1_X^i\}$ для квантового дифференциального модуля (X, d^i) служит семейство отображений $1_X = \{1_X^i : X \rightarrow X\}$, где $1_X^i = 0$, $i > 0$, и 1_X^0 – тождественное отображение модуля X . Таким образом, класс всех квантовых дифференциальных модулей и их морфизмов образует категорию.

Гомотопией между морфизмами $f, g : (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ квантовых дифференциальных модулей называется семейство $h = \{h^i : X \rightarrow Y \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$ отображений модулей, которые для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^i h^j + h^j d^i = f^k - g^k \quad (3)$$

Легко видеть, что отношение между морфизмами квантовых дифференциальных модулей, определяемое наличием гомотопии между ними, является отношением эквивалентности. При помощи этого отношения эквивалентности стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности квантовых дифференциальных модулей.

Важнейшими частными случаями понятия гомотопической эквивалентности квантовых дифференциальных модулей являются понятия сильной деформационной ретракции и SDR-ситуации квантовых дифференциальных модулей. Рассмотрим эти понятия более детально, поскольку они потребуются ниже. Пусть заданы произвольные квантовые дифференциальные модули (X, d^i) и (Y, d^i) . Кроме того, пусть заданы морфизмы квантовых дифференциальных модулей $\{\eta^i\} : (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d^i) : \{\xi^i\}$ и задана гомотопия $\{h^i : (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)\}$, для которых выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \sum_{s+t=i} \eta^s \xi^t &= (1_Y)^i, \\ \sum_{s+t=i} d^s h^t + h^s d^t &= \sum_{s+t=i} \xi^s \eta^t - (1_X)^i, \\ i &\geq 0. \end{aligned}$$

Эта ситуация записывается в виде $(\{\eta^i\} : (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d^i) : \{\xi^i\}, \{h^i\})$ и называется сильной деформационной ретракцией квантовых дифференциальных модулей.

При выполнении дополнительных условий

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} \eta^i h^j &= 0, \quad \sum_{i+j=k} h^i \xi^j = 0, \\ \sum_{i+j=k} h^i h^j &= 0, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

указанная сильная деформационная ретракция квантовых дифференциальных модулей называется SDR-ситуацией квантовых дифференциальных модулей.

Большое количество примеров SDR-ситуаций квантовых дифференциальных модулей можно получить при рассмотрении заданных над полем квантовых дифференциальных модулей и их гомологий относительно начальной компоненты квантового дифференциала. Действительно, пусть (X, d^i) – произвольный заданный над полем квантовый дифференциальный модуль, и пусть $H(X) = \text{Ker } d^0 / \text{Im } d^0$ – гомологический модуль дифференциального модуля (X, d^i) . Тогда, как показано в работе [1], на гомологическом модуле $H(X)$ возникает квантовый дифференциал $\{d_*^i : H(X) \rightarrow H(X)\}$, где $d_*^0 = 0$, и, более того, возникает SDR-ситуация

$$(\{\eta_*^i\} : (X, d^i) \rightrightarrows (H(X), d_*^i) : \{\xi_*^i\}, \{h_*^i\})$$

квантовых дифференциальных модулей. Квантовый дифференциальный модуль $(H(X), d_*^i)$ называется гомологическим квантовым дифференциальным модулем заданного над полем квантового дифференциального модуля (X, d^i) . Указанная выше SDR-ситуация $(\{\eta_*^i\} : (X, d^i) \rightrightarrows (H(X), d_*^i) : \{\xi_*^i\}, \{h_*^i\})$ называется гомологической SDR-ситуацией заданного над полем квантового дифференциального модуля (X, d^i) .

Определение. Возмущением квантового дифференциального модуля (X, d^i) назовем семейство отображений модулей $\{t^i : X \rightarrow X \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 1, t^0 = 0\}$, которые для каждого целого числа $k \geq 1$ удовлетворяют следующему отношению:

$$\sum_{i+j=k} d^i t^j + \sum_{i+j=k} t^i d^j = - \sum_{i+j=k} t^i t^j \quad (4)$$

Рассмотрим соотношения (4) для малых значений $k \geq 1$. При $k = 1$ соотношение (4) принимает вид

$$d^0 t^1 + t^1 d^0 = 0.$$

Это говорит о том, что отображения d^0 и t^1 являются антикоммутирующими, т. е.

$d^0 t^1 = -t^1 d^0$. При $k = 2$ соотношение (4) записывается в виде

$$d^0 t^2 + t^2 d^0 = 0 - (d^1 t^1 + t^1 d^1 + (t^1)^2).$$

Таким образом, можно считать, что отображение модулей $t^1 : X \rightarrow X$ является с точностью до гомотопии возмущением отображения $d^1 : X \rightarrow X$, которое, как было сказано выше, является дифференциалом с точностью до гомотопии.

Простейшие примеры возмущений квантовых дифференциальных модулей возникают в ситуации, когда задан произвольный модуль с двумя антикоммутирующими дифференциалами и, кроме того, задано любое дифференциальное возмущение одного из дифференциалов, которое антикоммутирует с другим дифференциалом. В самом деле, как было указано выше, модуль X с двумя антикоммутирующими дифференциалами $d', d'' : X \rightarrow X$ определяет квантовый дифференциальный модуль (X, d') , где $d^0 = d'$, $d^1 = d''$ и $d^i = 0$, $i \geq 2$. Если теперь задано дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d') , т. е. выполнено условие $d^1 t + t d^1 = -t^2$, антикоммутирующее с дифференциалом d^0 , т. е. выполнено условие $d^0 t + t d^0 = 0$, то определено возмущение $\{t^i\}$ квантового дифференциального модуля (X, d') , которое задается формулами

$$t^0 = 0, t^1 = t \text{ и } t^i = 0, i \geq 2.$$

Приведем примеры возмущений квантовых дифференциальных модулей, которые возникают при рассмотрении возмущений дифференциальных модулей с фильтрациями. Пусть над произвольным полем задан дифференциальный модуль с возрастающей фильтрацией $\{X^n\}$, $d(X^n) \subseteq X^n$, $n \geq 0$ и пусть задано дифференциальное возмущение дифференциального модуля (X, d) , удовлетворяющее условию $t(X^n) \subseteq X^{n-1}$, $n \geq 1$. Так же, как и выше, обозначим через Y^n подмодуль модуля X^n , для которого $X^n = Y^n \oplus X^{n-1}$. При помощи условия $d(X^n) \subseteq X^n$, как было ранее показано, определяется квантовый дифференциальный модуль (X, d') . Теперь при

помощи условия $t(X^n) \subseteq X^{n-1}$ определим отображение $t_n^i : Y^n \rightarrow Y^{n-i}$, $i \geq 1$ как компоненту возмущения $t : Y^n \rightarrow X^{n-1} = Y^{n-1} \oplus \dots \oplus Y^{n-i} \oplus \dots \oplus Y^0$. Легко видеть, что семейство отображений $\{t^i : X \rightarrow X \mid i \geq 0\}$, где $t^0 = 0$, $t^i = \bigoplus_{n \geq i} t_n^i$, $i \geq 1$, является возмущением указанного квантового дифференциального модуля (X, d') , поскольку условие $dt + td = -t^2$ в рассматриваемом случае эквивалентно соотношениям (4).

Установим теперь основные гомотопические свойства возмущений квантовых дифференциальных модулей. Для этого заметим, что задание некоторого возмущения $\{t^i\}$ квантового дифференциального модуля (X, d') эквивалентно, как следует из соотношений (4), введению на модуле X нового квантового дифференциала

$$\{D^i = d' + t^i \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}.$$

Поведение возмущений квантовых дифференциальных модулей при гомотопических эквивалентностях типа сильных деформационных ретракций описывается в следующем утверждении.

Теорема 1. Пусть задана произвольная сильная деформационная ретракция квантовых дифференциальных модулей $(\{\eta^i\} : (X, d') \rightrightarrows (Y, d') : \{\xi^i\}, \{h^i\})$ и, кроме того, пусть задано любое возмущение $\{t^i : X \rightarrow X\}$ квантового дифференциального модуля (X, d') . Тогда на квантовом дифференциальном модуле (Y, d') возникает возмущение $\{\tilde{t}^i : Y \rightarrow Y\}$, определяемое формулами

$$\tilde{t}^0 = 0,$$

$$\tilde{t}^i = \sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k + \\ + j_1 + \dots + j_{k-1} = i}} (\eta^{j_1} t^{i_1})(h^{j_2} t^{i_2}) \dots (h^{j_k} t^{i_k}) \xi^{j_{k+1}}, \quad (5) \\ i \geq 1.$$

Более того, возникает сильная деформационная ретракция квантовых дифференциальных модулей $(\{\tilde{\eta}^i\} : (X, d' + t^i) \rightrightarrows (Y, d' + \tilde{t}^i) : \{\tilde{\xi}^i\}, \{\tilde{h}^i\})$, которая задается следующими формулами:

$$\tilde{\xi}^0 = \xi^0, \quad \tilde{\xi}^i = \xi^i + \sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k + \\ + j_1 + \dots + j_{k-1} = i}} (h^{j_1} t^{i_1})(h^{j_2} t^{i_2}) \dots (h^{j_k} t^{i_k}) \xi^{j_{k+1}}, \quad i \geq 1, \quad (6)$$

$$\bar{\eta}^0 = \eta^0, \quad \bar{\eta}^i = \eta^i + \sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = \\ + j_1 + \dots + j_{k+1} = i}} (\eta^{j_1} t^{i_1}) (\eta^{j_2} t^{i_2}) \dots (\eta^{j_k} t^{i_k}) \eta^{j_{k+1}}, \quad i \geq 1, \quad (7)$$

$$\bar{h}^0 = h^0, \quad \bar{h}^i = h^i + \sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = \\ + j_1 + \dots + j_{k+1} = i}} (h^{j_1} t^{i_1}) (h^{j_2} t^{i_2}) \dots (h^{j_k} t^{i_k}) h^{j_{k+1}}, \quad i \geq 1. \quad (8)$$

Если сильная деформационная ретракция квантовых дифференциальных модулей

$$(\{\eta^i\} : (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d^i) : \{\xi^i\}, \{h^i\})$$

является SDR-ситуацией квантовых дифференциальных модулей, то сильная деформационная ретракция квантовых дифференциальных модулей

$$(\{\bar{\eta}^i\} : (X, d^i + t^i) \rightrightarrows (Y, d^i + \bar{t}^i) : \{\bar{\xi}^i\}, \{\bar{h}^i\}),$$

получаемая по формулам (5)–(8), также является SDR-ситуацией квантовых дифференциальных модулей.

Если для любого заданного над полем квантового дифференциального модуля рассмотреть его гомологическую SDR-ситуацию

и применить теорему 1 к произвольному возмущению этого квантового дифференциального модуля, то получим следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть квантовый дифференциальный модуль (X, d^i) задан над полем $\mathbb{C}$, кроме того, пусть задано любое возмущение $\{t^i : X \rightarrow X\}$ этого квантового дифференциального модуля. Тогда на гомологическом квантовом дифференциальном модуле $(H(X), d_*^i)$ возникает возмущение $\{\bar{t}^i : H(X) \rightarrow H(X)\}$, определяемое формулами (5) и, более того, возникает SDR-ситуация квантовых дифференциальных модулей

$$(\{\bar{\eta}^i\} : (X, d^i + t^i) \rightrightarrows (H(X), d_*^i + \bar{t}^i) : \{\bar{\xi}^i\}, \{\bar{h}^i\}),$$

заданная по формулам (6)–(8).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лапин С. В. Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули / С. В. Лапин // Мат. сб. – 2001. – Т. 192, № 11. – С. 55–76.
2. Gugenheim V. K. A. M. On a chain complex of a fibration / V. K. A. M. Gugenheim // Illinois J. Math. – 1972. – Vol. 3. – P. 398–414.
3. Gugenheim V. K. A. M. Perturbation theory in differential homological algebra I / V. K. A. M. Gugenheim, L. A. Lambe // Illinois J. Math. – 1989. – Vol. 33, № 4. – P. 566–582.
4. Gugenheim V. K. A. M. Perturbation theory in differential homological algebra II / V. K. A. M. Gugenheim, L. A. Lambe, J. D. Stasheff // Illinois J. Math. – 1991. – Vol. 35, № 3. – P. 357–373.

Поступила 05.10.10.

СТРУКТУРА A_∞ -МОДУЛЯ НА КОЛЬЦАХ МНОГОЧЛЕНОВ*

М. В. Ладоскин

В данной работе решается вопрос о возможности продолжения структуры модуля M над алгеброй A до структуры A_∞ -модуля для случая, когда модуль M является кольцом многочленов над полем $\mathbb{Z}_2$, рассматриваемым как модуль над алгеброй многочленов.

Основной результат работы сформулирован в утверждении теоремы 2.1 и следствии из нее, в которой говорится, что на кольцах границ, являющихся фактор-алгебрами алгебры многочленов, не существует продолжения до структуры нетривиального A_∞ -модуля над указанной алгеброй.

В последнее время результаты, полученные в дискретной и комбинаторной геометрии, например в [7], активно используются в алгебраической топологии и как вычислительные средства, и как объекты исследования. Большое количество примеров этого рассматривается, например, в работе [4]. Кроме этого, много приложений в области топологической теории действий торов на топологических многообразиях содержится в работе [1]. Там же A_∞ -структуры вводятся на комплекс Кошуля колец Стилти–Райспера.

A_∞ -пространства, описанные впервые Стасеффом в работе [8], позднее нашли применение в различных вычислительных задачах гомологической алгебры и алгебраической топологии. В работе [2] структуры A_∞ -алгебры и A_∞ -модуля были найдены на гомологиях произвольных заданных над полем алгебры и модуля соответственно. Позднее возможности продолжения дифференциальных и градуированных алгебры и модуля до соответствующих A_∞ -структур были рассмотрены в [2–3; 5–6]. В них для исследования строятся комплексы Хохшильда для соответствующих объектов, гомологии которых отвечают за возможность нетривиального продолжения.

Отметим, что в данной работе знаки во всех формулах написаны с учетом стандартного правила знаков при вычислении тензорного произведения отображений на тензорном произведении элементов.

1. A_∞ -структуры и комплекс Хохшильда для модулей над алгебрами

Напомним определения, связанные с понятиями градуированной A_∞ -алгебры и градуированного A_∞ -модуля над градуированной A_∞ -алгеброй [8]. Во всех формулах в данном параграфе суммирование ведется, кроме указанного, также по местам с номером k , на которых стоят операции внутри скобок.

A_∞ -алгеброй называется градуированный модуль A , снабженный набором операций $\{m_i\} : A^{\otimes i} \rightarrow A$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} m_i((A^{\otimes i})_q) &\subset A_{q+i-2}, \quad i \geq 2, \\ \sum_j (-1)^{(j+1)(k+1)+i} m_{i-j+1}(1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \\ &\otimes m_j \otimes \dots \otimes 1) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Морфизмом из A_∞ -алгебры $(A, \{m_i\})$ в A_∞ -алгебру $(A', \{m'_i\})$ называется семейство гомоморфизмов $\{f_i : A^{\otimes i} \rightarrow A'\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} f_i((A^{\otimes i})_q) &\subset A'_{q+i-1}, \quad i \geq 1, \\ \sum_j (-1)^{(i-1)+(i-1)(k+1)} f_{i-j+1}(1 \otimes \\ &\otimes \dots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \dots \otimes 1) + \\ &+ \sum_{k_1 + \dots + k_i = i} (-1)^{k_2 + k_3 + \dots} m'_i(f_{k_1} \otimes \dots \otimes f_{k_i}) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

© М. В. Ладоскин, 2010

* Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.» проекта «Построение гомотопически устойчивого аналога симплицеального объекта», Государственный контракт № П1226 от 07.06.2010 с Министерством образования и науки РФ.

Если $f_1 = id$, то морфизм A_∞ -алгебр является изоморфизмом в категории A_∞ -алгебр.

A_∞ -модулем над A_∞ -алгеброй $(A, \{m_i\})$ называется градуированный модуль M , снабженный набором действий $\{p_i : A^{\otimes i} \otimes M \rightarrow M\} \quad i \geq 1$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$p_i : ((A^{\otimes i} \otimes M)_q) \subset M_{q-i+1},$$

$$\sum (-1)^{k(j+1)+i} p_{i-j+1}(1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \dots \otimes 1) + \sum (-1)^{(i-1)(j-1)} p_{i-j}(1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes p_j) = 0.$$

Морфизмом A_∞ -модулей $(M, \{p_i\})$ и $(M', \{p'_i\})$ соответственно над A_∞ -алгебрами $(A, \{m_i\})$ и $(A', \{m'_i\})$ называется пара семейств гомоморфизмов $\{f_i : A^{\otimes i} \rightarrow A'\}$, $\{g_i : A^{\otimes i} \otimes M \rightarrow M'\}$, $i \geq 0$, где $\{f_i\}$ — морфизм A_∞ -алгебр, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$g_i(A^{\otimes i} \otimes M)_q \subset M'_{q-i+1}$$

$$\sum (-1)^{k(j+1)+i} g_{i-j+1}(1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \dots \otimes 1) + \sum (-1)^{j(i+1)+1} g_{i-j}(1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes p_j) + \sum_{k_1+\dots+k_{i-1}+1} (-1)^{k_2+k_4+\dots} p'_i(f_{k_1} \otimes \dots \otimes f_{k_{i-1}} \otimes g_{k_i}).$$

Если $f_1 = id$, $f_i = 0$, при $i > 1$, $g_1 = id$, то морфизм A_∞ -модулей является изоморфизмом в категории A_∞ -модулей.

Формулы (1), (3) называют соотношениями Стасеффа соответственно для градуированных A_∞ -алгебр и градуированных A_∞ -модулей над градуированными A_∞ -алгебрами.

Определение 1.1. A_∞ -алгебру $(A, \{m_i\})$ будем называть продолжением алгебры (A, π) , если отображение m_2 совпадает с умножением π в алгебре. Если все высшие умножения m_i , $i > 2$ равны нулю, то продолжение будем называть тривиальным.

В работах [2; 5] описывается комплекс Хохшильда для алгебры, гомологии которого отвечают за возможность нетривиального продолжения алгебры. В частности, показывается, что если гомологии комплекса Хохшильда в размерностях $(n, n-1)$ равны нулю, то для данной алгебры существует с точностью до изоморфизма A_∞ -алгебр только тривиальное продолжение.

Определение 1.2. A_∞ -модуль над алгеброй $(M, \{p_i\})$ будем называть продолжением модуля над алгеброй (M, μ) , если отображение p_1 совпадает со структурным действием μ в модуле. Если все высшие действия p_i , $i > 1$ равны нулю, то продолжение будем называть тривиальным.

Приведем основные понятия, связанные с комплексом Хохшильда для модулей над алгебрами и его применением к описанию продолжений модуля над алгеброй [3].

Пусть (M, μ) — левый градуированный модуль над алгеброй (A, π) , где структурное отображение $\mu : A \otimes M \rightarrow M$ для модуля M удовлетворяет условию $\mu(1 \otimes \mu) = \mu(\pi \otimes 1)$.

Определение 1.3. Комплексом Хохшильда для модуля M над алгеброй A будем называть $S^*(A, M) = \sum_{n,k} S^{n,k}(A, M)$, где

$S^{n,k}(A, M) = Hom^k(A^{\otimes n} \otimes M, M)$, а дифференциал $\delta : S^{n,k}(A, M) \rightarrow S^{n+1,k}(A, M)$ определяется формулой

$$\delta f = (-1)^{n+1} \mu(1 \otimes f) + \sum (-1)^{i+n+1} f(1 \otimes \dots \otimes \pi \otimes \dots \otimes 1) + f(1 \otimes \dots \otimes \mu).$$

В [3] доказывается утверждение

Теорема 1.1. Если гомологии комплекса Хохшильда для модулей над алгебрами $H^{n,i-n}(S^*(A, M)) = 0$ при $n > 1$, то любое продолжение модуля M над фиксированной алгеброй A изоморфно тривиальному как A_∞ -модуль над алгеброй A .

2. Продолжение колец Стенли-Райснера

Рассмотрим кольцо многочленов от двух переменных степени 1 над полем Z_2 , обозначаемое $Z_2[x, y]$ как модуль над алгеброй многочленов от одной переменной $Z_2[x]$ над полем Z_2 . Структурное действие

$$\mu : Z_2[x] \otimes Z_2[x, y] \rightarrow Z_2[x, y]$$

зададим на образующих формулой

$$\mu(x^k \otimes x^l y^q) = x^{k+l} y^q. \quad (6)$$

Будем исследовать вопрос о существовании структуры A_∞ -модуля над A_∞ -алгеброй с тривиальной структурой $Z_2[x]$ на рассматриваемом модуле $Z_2[x, y]$. Построим для модуля $Z_2[x, y]$ согласно ранее приведенным конструкциям комплекс Хохшильда $S^*(Z_2[x], Z_2[x, y])$ и исследуем гомологии Хохшильда данного модуля. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Гомологии Хохшильда модуля $Z_2[x, y]$ удовлетворяют условию*

$$H^{n,1-n}(S^*(Z_2[x], Z_2[x, y])) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $f \in S^*(Z_2[x], Z_2[x, y])$ такое, что $\delta f = 0$. Покажем, что в этом случае найдется элемент $h \in S^{r-1}(Z_2[x], Z_2[x, y])$, такой, что $\delta h = f$. Определим

$$\begin{aligned} h(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_{n-1}} \otimes x^t y^q) = \\ = f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_{n-1}} \otimes x^t \otimes y^q). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta h(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^{k_{n+1}} y^q) &= x^{k_1} h(x^{k_2} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^{k_{n+1}} y^q) + \\ &+ h(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_{n-1}} \otimes x^{k_n+k_{n+1}} y^q) + \sum_{i=1}^{n-1} h(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_i+k_{i+1}} \otimes \dots \otimes x^n \otimes \\ &\otimes x^{k_{n+1}} y^q) = x^{k_1} f(x^{k_2} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^{k_{n+1}} \otimes y^q) + f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_{n-1}} \otimes \\ &\otimes x^{k_n+k_{n+1}} \otimes y^q) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_i+k_{i+1}} \otimes \dots \otimes x^n \otimes x^{k_{n+1}} \otimes y^q) = \\ &= x^{k_1} f(x^{k_2} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^{k_{n+1}} \otimes y^q) + \sum_{i=1}^n f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_i+k_{i+1}} \otimes \dots \otimes \\ &\otimes x^{k_{n+1}} \otimes y^q) = f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^{k_{n+1}} y^q). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того, что $\delta f = 0$, в частности,

$$\begin{aligned} 0 = \delta f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_{n+1}} \otimes y^q) &= x^{k_1} f(x^{k_2} \otimes \dots \otimes x^{k_{n+1}} \otimes y^q) + \sum_{i=1}^n f(x^{k_1} \otimes \\ &\otimes \dots \otimes x^{k_i+k_{i+1}} \otimes \dots \otimes x^{k_{n+1}} \otimes y^q) + f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^{k_{n+1}} y^q). \end{aligned}$$

Приведенные вычисления показывают, что для любого $f \in \text{Ker} \delta^n$ можно указать элемент $h \in S^*(Z_2[x], Z_2[x, y])$ такое, что $\delta h = f$. Таким образом, получаем, что

$$H^n(S^*(Z_2[x], Z_2[x, y])) = 0 \text{ при } n > 1.$$

Так как

$$\begin{aligned} H^n(S^*(Z_2[x], Z_2[x, y])) = \\ = \oplus_i H^{n,i}(S^*(Z_2[x], Z_2[x, y])), \end{aligned}$$

Докажем, что при этом условии

$$\begin{aligned} \delta h(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^t y^q) = \\ = f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^t y^q). \end{aligned}$$

Учитывая, что π – обычное умножение многочленов в алгебре $Z_2[x]$, т. е. $\pi(x^k \otimes x^n) = x^k x^n = x^{k+n}$, а μ определяется формулой (5), применим формулу (5). Будем отождествлять ввиду согласованности действия модуля с умножением элементы $x^{n+k} y^q$, $\mu(x^n \otimes x^k y^q)$, $x^n(x^k y^q)$, т. е. считать, что $x^{n+k} y^q = \mu(x^n \otimes x^k y^q) = x^n(x^k y^q)$. Получим

то, поскольку сумма прямая, можно сделать вывод, что

$$H^{n,1-n}(S^*(Z_2[x], Z_2[x, y])) = 0.$$

Теорема доказана.

Применяя к полученному результату теорему 1.1, получим

Следствие 2.1. *На $Z_2[x, y]$ существует с точностью до изоморфизма A_∞ -модулей только тривиальная структура A_∞ -модуля.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бухштабер В. М. Топические действия в топологии и комбинаторике / В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. – М.: МЦНМО, 2004. – 272 с.
2. Кадеишвили Т. В. К теории гомологий расслоенных пространств // УМН. – 1980. – Т. 35, вып. 3(213). – С. 183–188.
3. Ладоскин М. Н. A_∞ -модули над A_∞ -алгебрами и когомология комплекса Хохшильда для модулей над алгебрами / М. В. Ладоскин // Мат. заметки. – 2006. – Т. 53, № 5. – С. 717–728.
4. Ноликов П. С. Топология / П. С. Ноликов. – М.: Ижевск: РХД, 2002. – 336 с.
5. Смирнов В. А. Функтор D для скрещенных тензорных произведений / В. А. Смирнов // Мат. заметки. – 1976. – Т. 20, № 4. – С. 465–472.

6. Смирнов В. А. A_∞ -структуры и функтор D / В. А. Смирнов // Изв. РАН. Сер. математическая. – 2000. – Т. 64, № 5. – С. 145–162.
7. Stanley R. Combinatorics and Commutative Algebra / R. Stanley. – Boston, MA : Birkhauser Boston Inc., 1996 (Progress in Mathematics, V. 41). – 180 p.
8. Stasheff J. D. Homotopy associativity of H-space, I, 2 / J. D. Stasheff. – Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – № 108. – P. 275–313.

Поступила 22.10.10.

ОДНА МОДЕЛЬ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПЕРСПЕКТИВЫ Б. В. РАУШЕНБАХА

А. В. Бритов, А. Э. Чудасв

В статье описаны три этапа проектирования: проектирование на картинную плоскость, плоскости – на сферу радиуса R , бесконечная картинная плоскость отображается на конечную поверхность сферы и мозг перерабатывает сложное сферическое изображение картинной плоскости так, что некоторые прямые отображаются в прямолинейные отрезки (для всех прямых это невозможно). В результате построения делается вывод, что обратная перспектива возникает начиная с некоторой линии. Определяется уравнение этой линии. Используя программу, разработанную А. Э. Чудасвым, приводятся примеры обратной перспективы, как на основе стандартного (чертежного) изображения E_2 на плоскости, так и на основе изображения в классической перспективе.

В книге Б. В. Раушенбаха изложена так называемая *общая теория перспективы*, в которой экспериментально обосновывается кроме классической прямой перспективы обратная перспектива, интуитивно отражаемая в работах некоторых художников [1]. Психологически прямая перспектива удаляет изображение, а обратная – включает зрителя в изображаемое пространство. При этом евклидова геометрия пространства очень сильно искажается как в прямой, так и в обратной перспективе. На самом деле многие наблюдения и выводы, приведенные в книге, могут быть оправданы и уточнены идеализированной моделью проектирования пространства на сетчатку глаза, что и было предложено А. В. Бритовым. Идеализация заключается

в том, что глаз рассматривается строго сферическим и хрусталик заменяется точкой S – центром проектирования, отбрасываются возможные преломляющие свойства среды внутри глаза. Мы специально вводим картинную плоскость $O\xi\eta$, на которую предварительно проектируется пространство $Oxyz$. Ее удаление h от центра S проектирования в реальной ситуации очень сильно зависит от наличия ближайших достаточно крупных объектов и потому в интерьере h исчисляется несколькими метрами, а на природе может доходить до нескольких километров. В дальнейшем именно h мы берем за единицу масштаба.

На первом этапе проектирование ведется на картинную плоскость (рис. 1).

© А. В. Бритов, А. Э. Чудасв, 2010

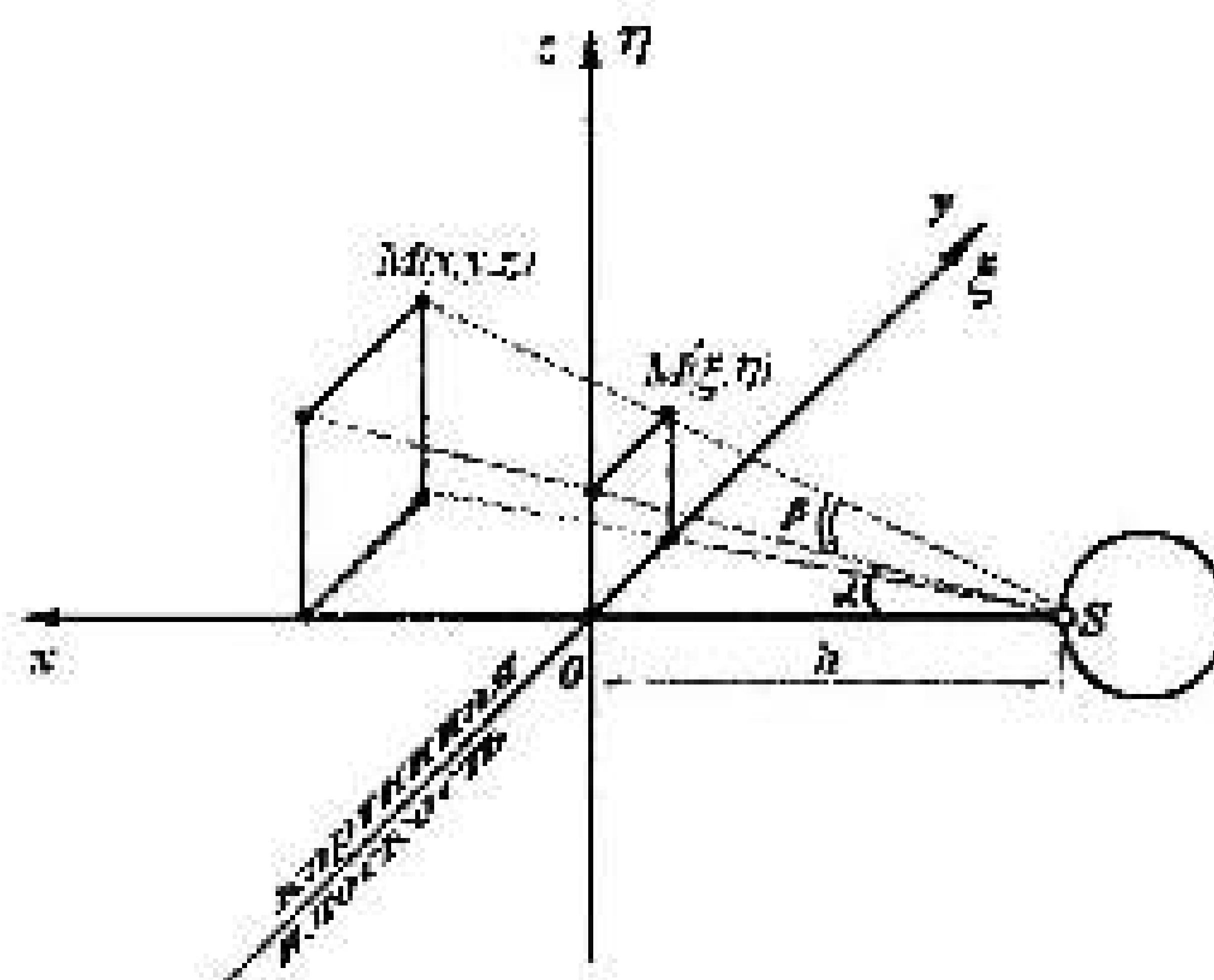


Рис. 1

При этом очевидно, что

$$\xi = \frac{hy}{x+h}, \quad \eta = \frac{hz}{x+h}, \quad (1)$$

где h – расстояние от центра проектирования (глаза) до картинной плоскости. На втором этапе рассматривается проектирование картинной плоскости на сферу радиуса R (рис. 2).

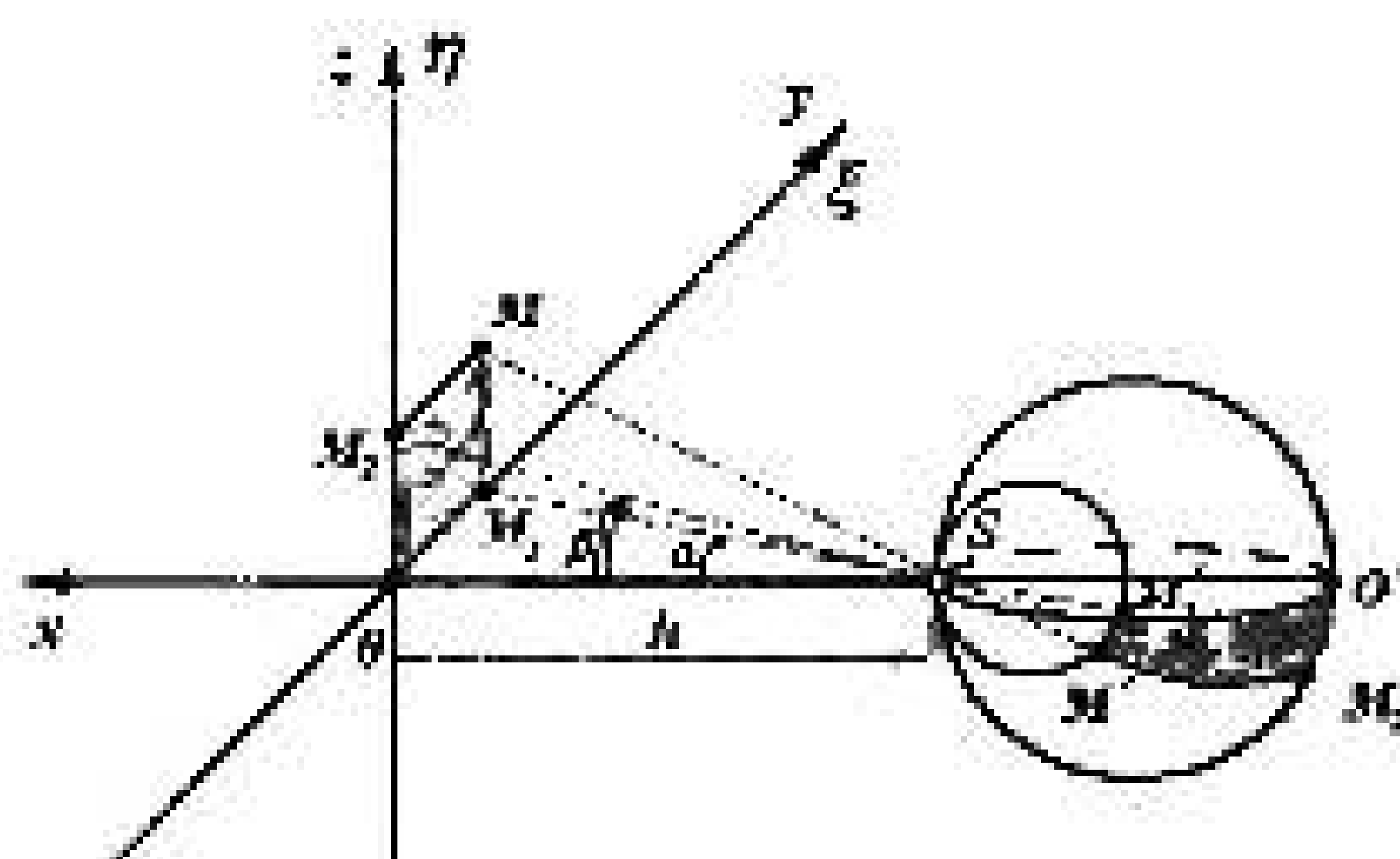


Рис. 2

При этом равные алгебраические отрезки $M_2M = OM_1 = \xi$ и $M_1M = OM_2 = \eta$ отображаются в неравные $M_2M' \neq O'M_1'$, $M_1M' \neq O'M_2'$:

$$\begin{aligned} O'M_1' &= 2R \cdot \arctan \frac{\xi}{h}, \\ O'M_2' &= 2R \cdot \arctan \frac{\eta}{h}, \\ M_1'M' &= \frac{2Rh}{\sqrt{h^2 + \xi^2}} \arctan \frac{\eta}{\sqrt{h^2 + \xi^2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$M_2M' = \frac{2Rh}{\sqrt{h^2 + \eta^2}} \arctan \frac{\xi}{\sqrt{h^2 + \eta^2}}.$$

«Считывание» координат на сфере требует дополнительных допущений. Мы исходим из того, что принимаем за координаты образа

$$\begin{cases} \bar{\xi} = O'M_1' = 2 \cdot R \cdot \arctan \frac{\xi}{h}, \\ \bar{\eta} = O'M_2' = 2 \cdot R \cdot \arctan \frac{\eta}{h}. \end{cases} \quad (3)$$

Полагая, как уже отмечалось, $h = 1$ и определив коэффициент гомотетии произвольно, получаем формулы:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \lambda \cdot \arctan \frac{y}{x+1}, \\ \bar{\eta} = \lambda \cdot \arctan \frac{z}{x+1}, \quad x > -1, \end{cases} \quad (4)$$

выражающие $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ через (x, y, z) и промежуточные формулы:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \lambda \cdot \arctan \xi, \\ \bar{\eta} = \lambda \cdot \arctan \eta. \end{cases} \quad (5)$$

Заметим еще, что (см. рис. 1)

$$\begin{cases} \bar{\xi} = h \cdot \operatorname{tg} \alpha, \\ \bar{\eta} = h \cdot \operatorname{tg} \beta. \end{cases} \quad (6)$$

Следующий, третий, этап моделирования опирается на следующие факты и гипотезы:

— очевидно, что бесконечная по (ξ, η) картинная плоскость отображается на конечную поверхность сферы $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, где $-\frac{\pi}{2} \cdot \lambda < \bar{\xi} < \frac{\pi}{2} \cdot \lambda$, $-\frac{\pi}{2} \cdot \lambda < \bar{\eta} < \frac{\pi}{2} \cdot \lambda$;

— последняя в работе гипотеза заключается в том, что мозг перерабатывает сложное сферическое изображение картинной плоскости (ξ, η) в $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ так, что некоторые прямые отображаются в прямолнейные отрезки (для всех прямых это невозможно). Из формул (4) и (5) видно, что можно сохранить прямолинейность горизонтальных и вертикальных линий, если считать $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ прямоугольными координатами точки, и тогда картинная плоскость (ξ, η) преобразуется в картинный прямоугольник $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$.

Пользуясь формулами (4) при $\lambda = 1$, рассмотрим изображение плоскости (рис. 3) в плоскость $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ (рис. 4) при разных значениях $z = z_0$, т. е. для горизонтальных плоскостей разного уровня. За счет симметрии ограничимся значениями $y \geq 0$.

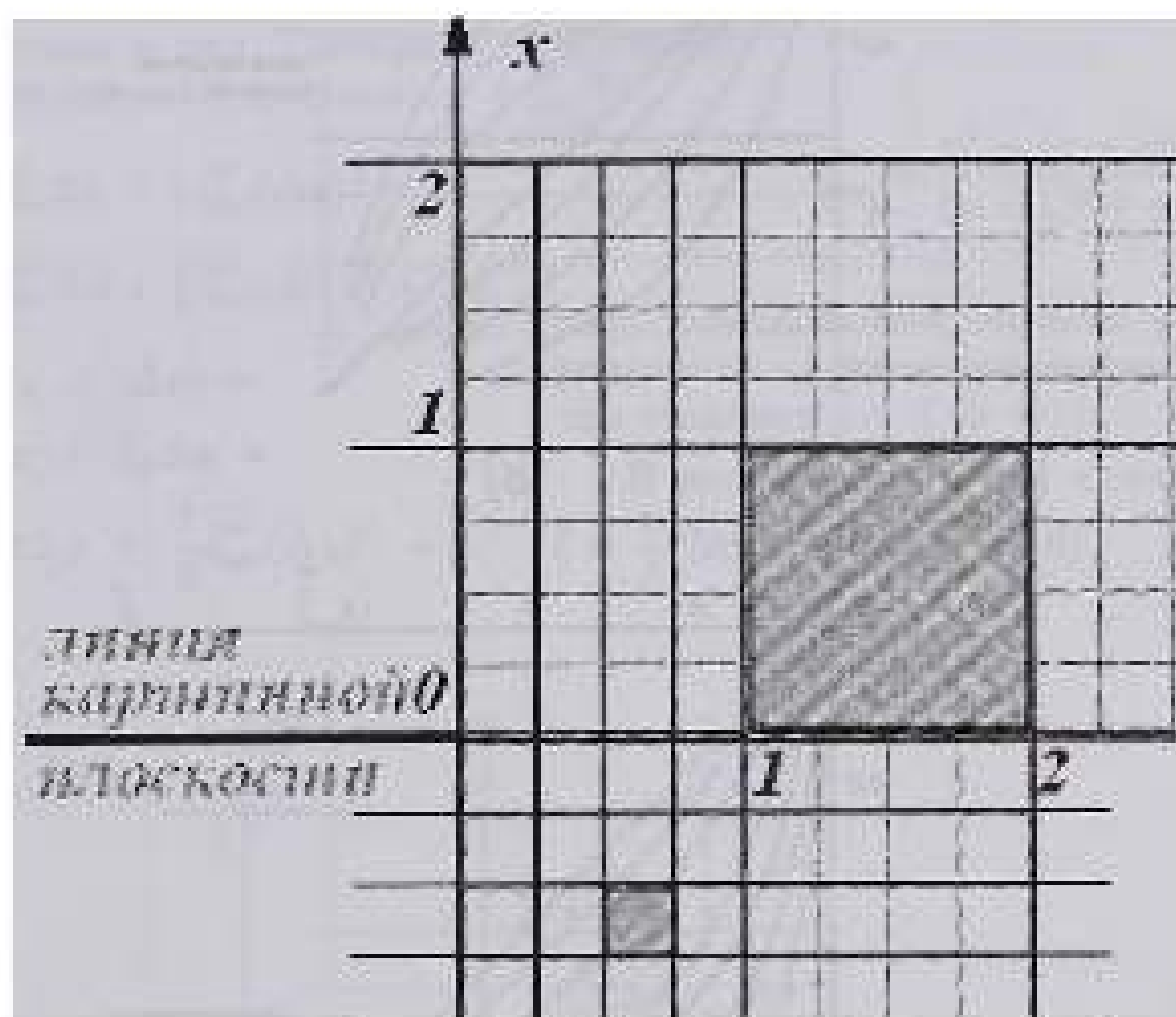
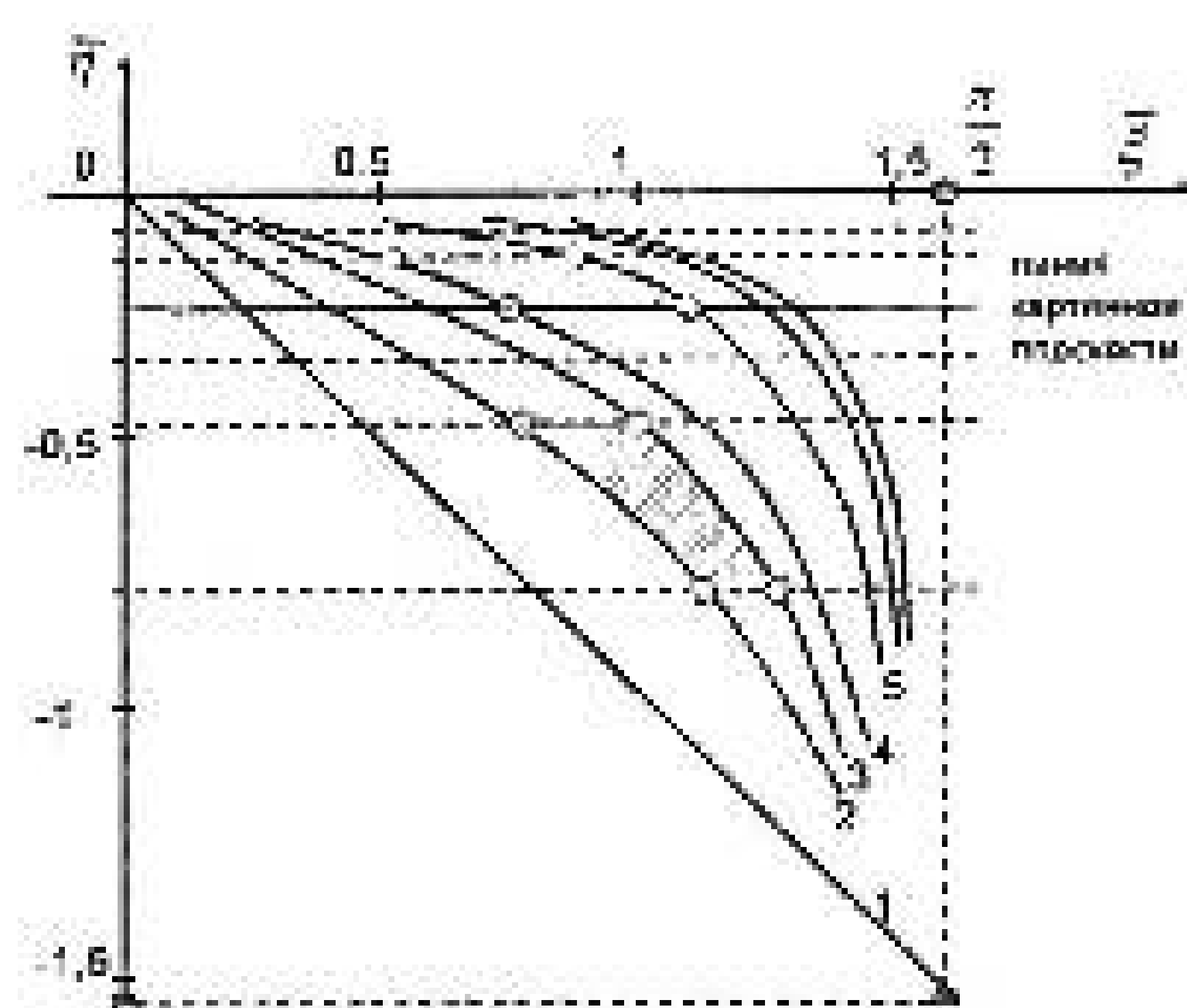


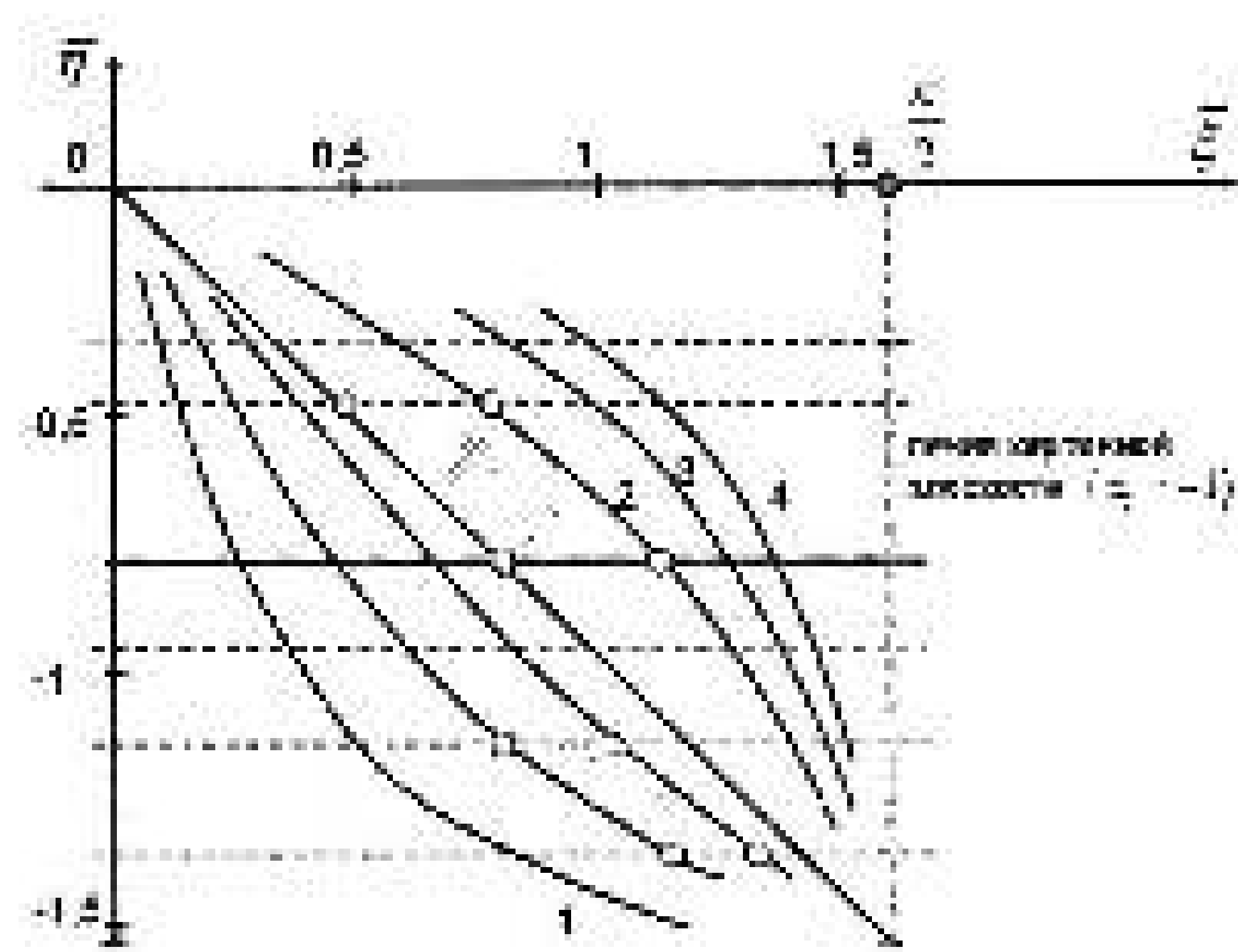
Рис. 3

Для построения используем таблицу соответствующих значений. На рис. 4 хорошо

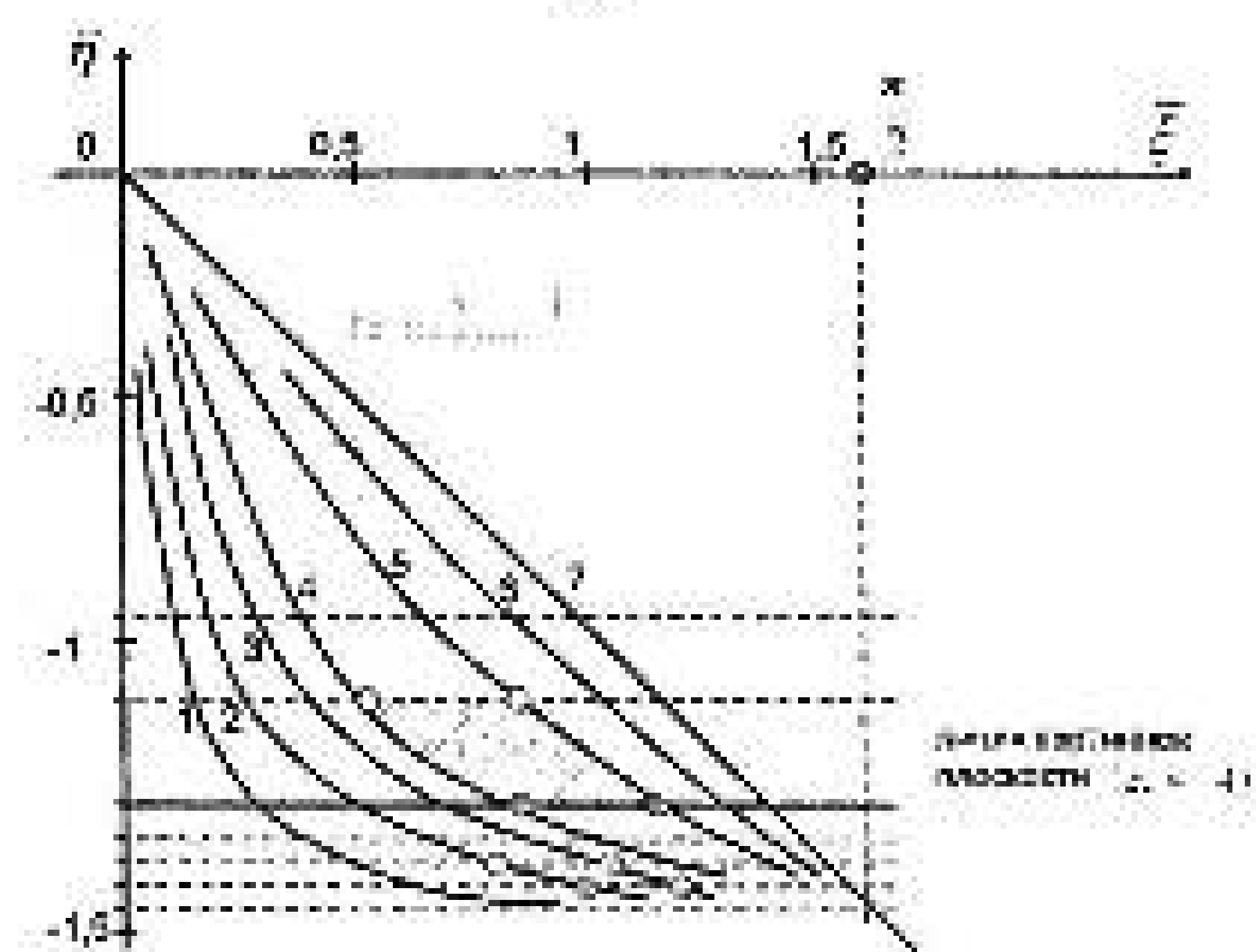
видно изменение характера изображения при удалении плоскости «вниз».



а)



б)



в)

Рис. 4

Отметим, что обратная перспектива возникает начиная с некоторой линии $y = f(x)$ (или $\eta = \varphi(\xi)$). Для определения уравнения этой линии (хотя бы приближенно) надо рассмотреть точку $M_0(x, y)$ и просле-

дить, на каком уровне при бесконечно малом перемещении вдоль координатной линии $X = x$ и $Y = y$, $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$ горизонтальные отрезки $M_0M_1 \approx M_2M_3$ (рис. 5).

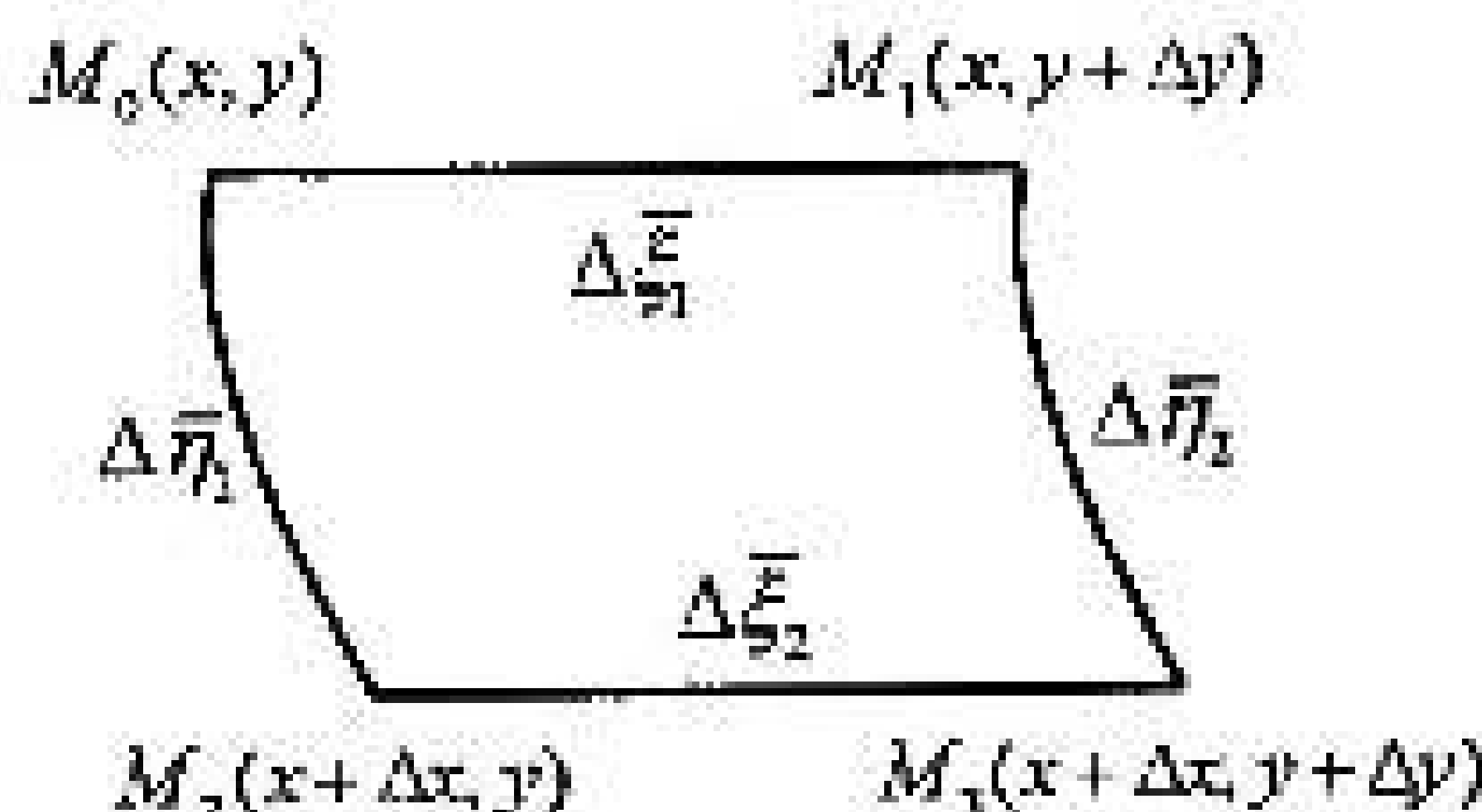


Рис. 5

Заметим, что

$$\Delta \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}(x, y + \Delta y) - \bar{\xi}(x, y)$$

$$\Delta \bar{\xi}_2 = \bar{\xi}(x + \Delta x, y + \Delta y) - \bar{\xi}(x + \Delta x, y).$$

Используя разложение в ряд Тейлора и обозначив $\bar{\xi} = \bar{\xi}(x, y)$, получим формулы:

$$\bar{\xi}(x, y + \Delta y) = \bar{\xi} + \bar{\xi}'_y \Delta y + \frac{1}{2} \bar{\xi}''_{yy} (\Delta y)^2 + \dots,$$

$$\bar{\xi}(x + \Delta x, y) = \bar{\xi} + \bar{\xi}'_x \Delta x + \frac{1}{2} \bar{\xi}''_{xx} (\Delta x)^2 + \dots,$$

$$\bar{\xi}(x + \Delta x, y + \Delta y) =$$

$$= \bar{\xi} + \bar{\xi}'_x \Delta x + \bar{\xi}'_y \Delta y +$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{\xi}''_{xx} (\Delta x)^2 + \bar{\xi}''_{xy} \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \bar{\xi}''_{yy} (\Delta y)^2 + \dots$$

Таким образом,

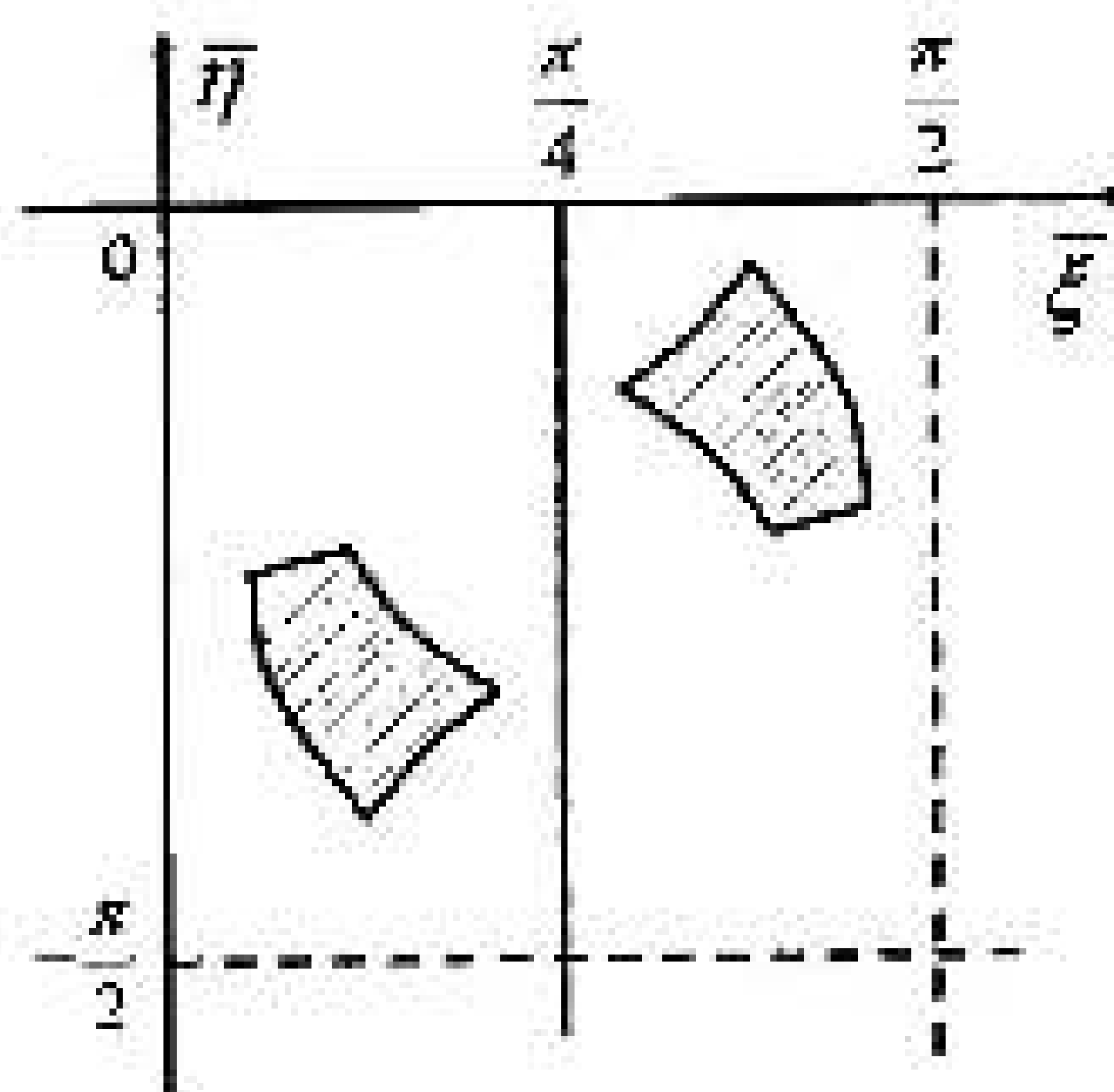
$$\Delta \bar{\xi}_1 - \Delta \bar{\xi}_2 = \bar{\xi}''_{xy} \Delta x \Delta y + \dots$$

и так как

$$\bar{\xi}''_{xy} = \frac{y^2 - (x+1)^2}{(x+1)^2 + y^2},$$

то с учетом нашей области $y \geq 0$ получим уравнение критической линии в виде $\bar{\xi}''_{xy} = 0$, что означает $y = \pm(x+1)$.

В координатах $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ получим уравнение $\bar{\xi} = \frac{\pi}{4}$ (при $\lambda = 1$) (рис. 6).



а)

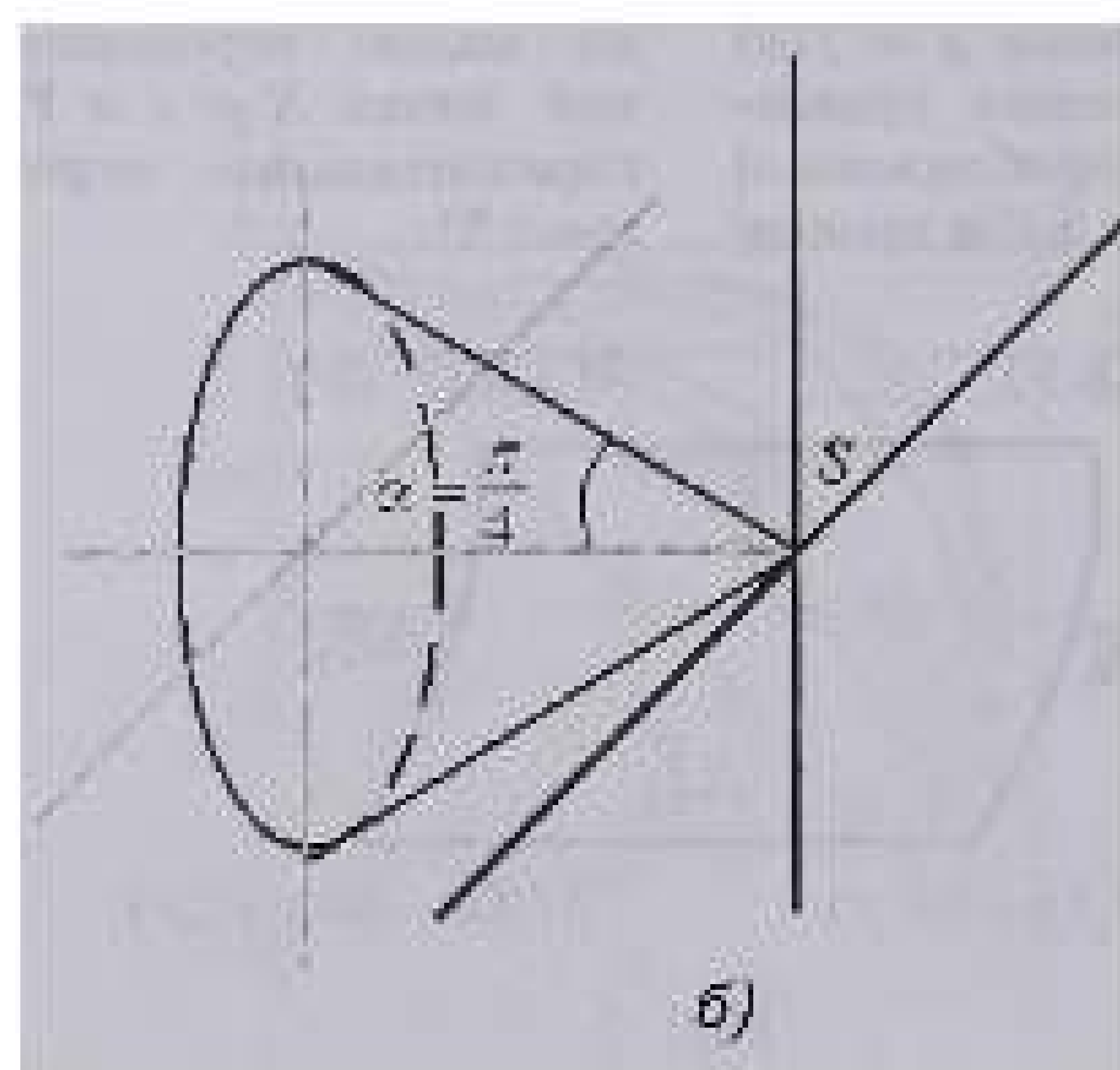


Рис. 6

Таким образом, критическая линия, разграничивающая сходящиеся «параллельные» от расходящегося в этой модели имеет уравнение $\bar{\xi} = \frac{\pi}{4}$.

Из рис. 2 и формулы (6) следует, что углу зрения $\alpha < \frac{\pi}{4}$ ($\beta < \frac{\pi}{4}$) отвечает

прямая перспектива, а значениям $\alpha, \beta > \frac{\pi}{4}$ – обратная. Мы считаем, что это достаточно хорошо отвечает реальным ощущениям.

Приведем примеры обратной перспективы, полученные с помощью программы, разработанной А. Э. Чудаевым.

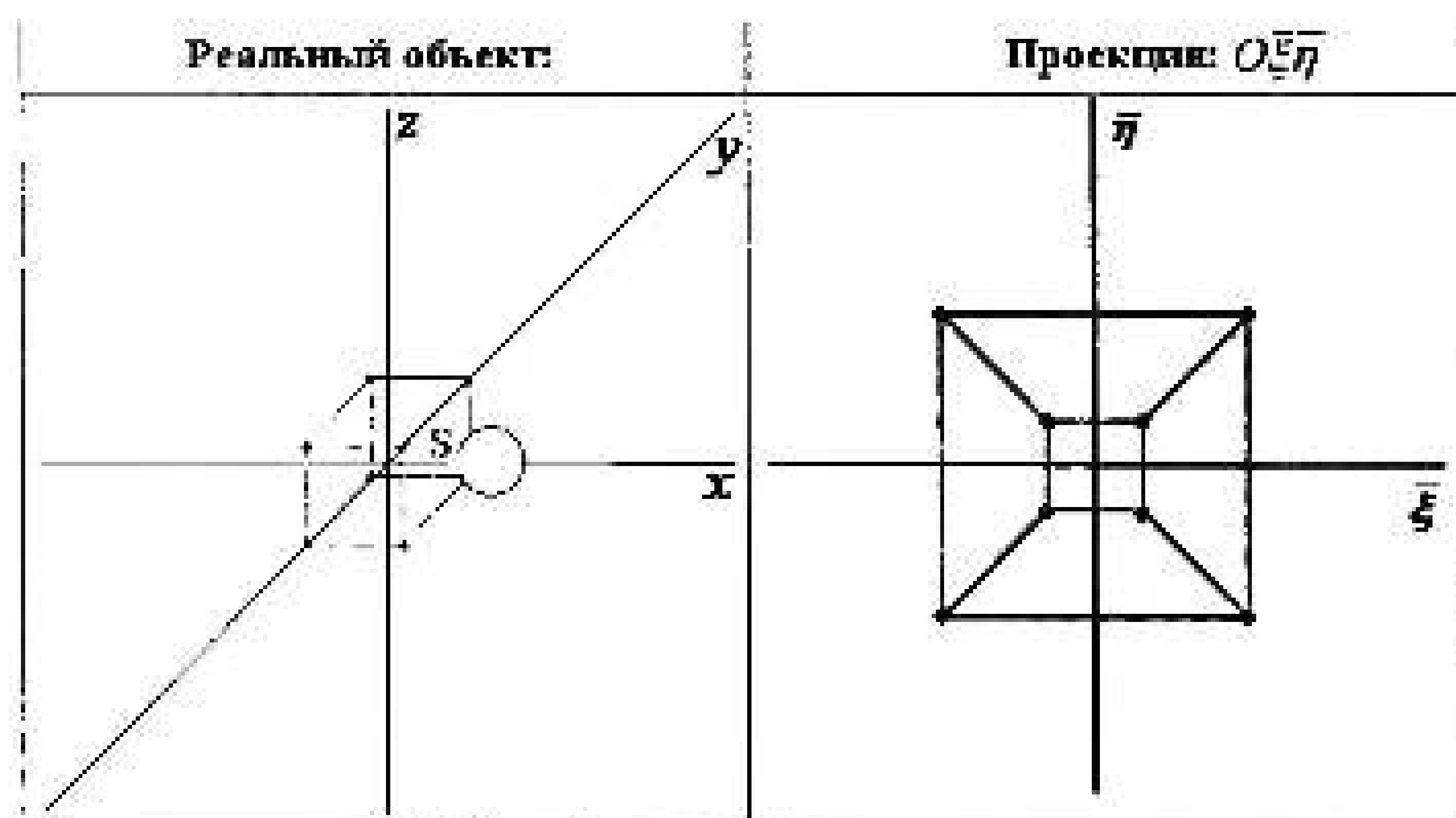


Рис. 7

Исходное положение куба

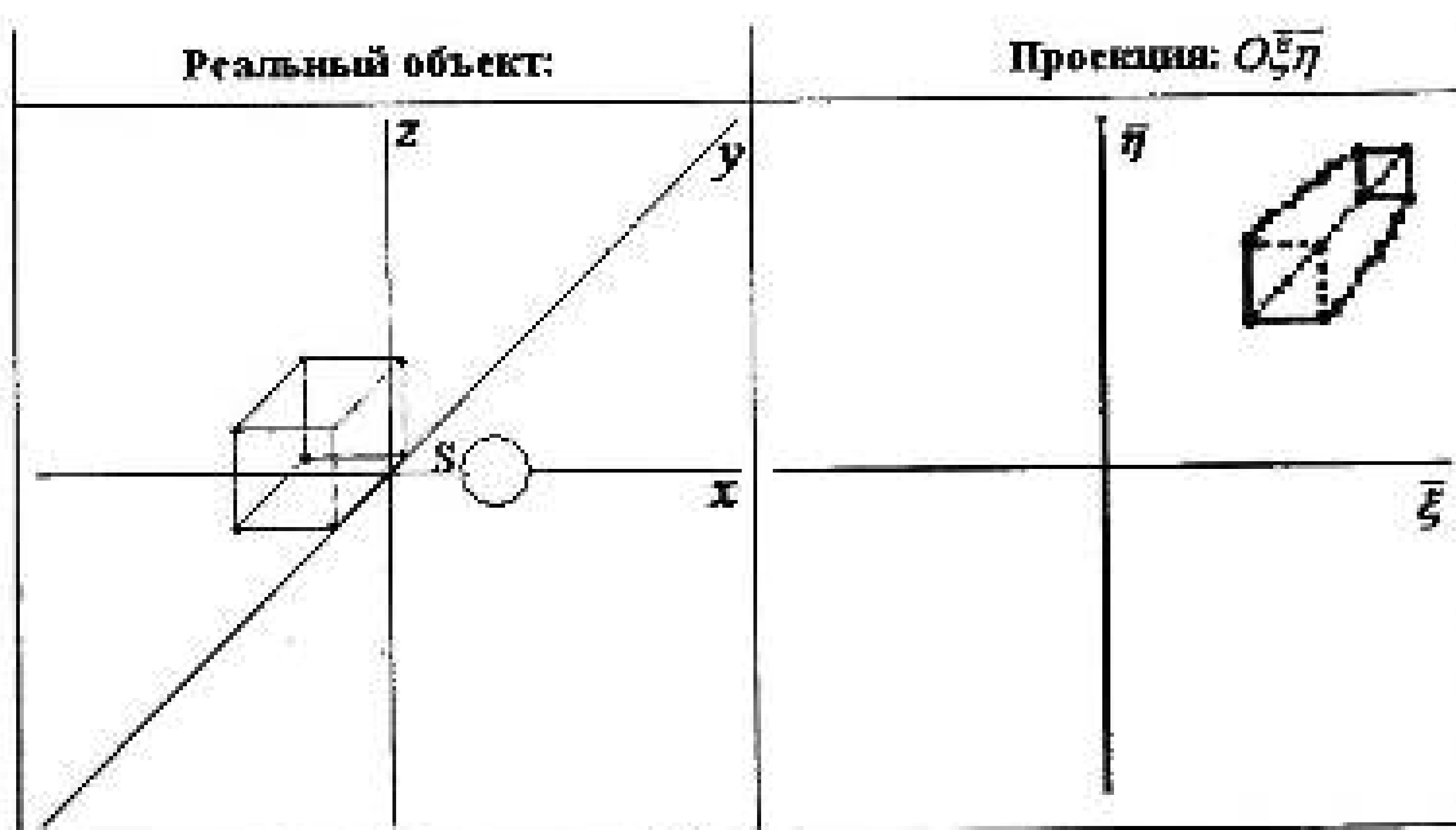
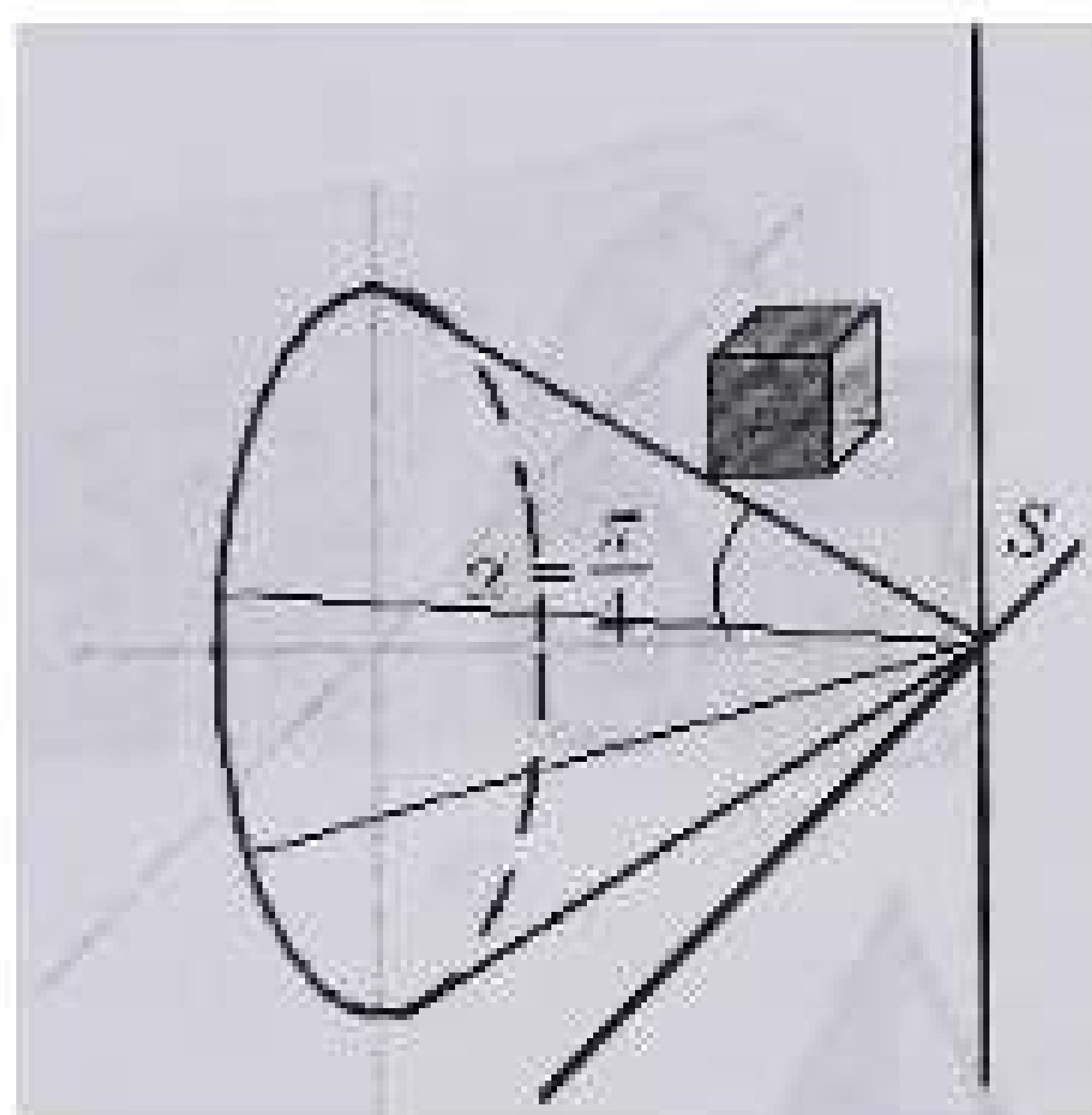
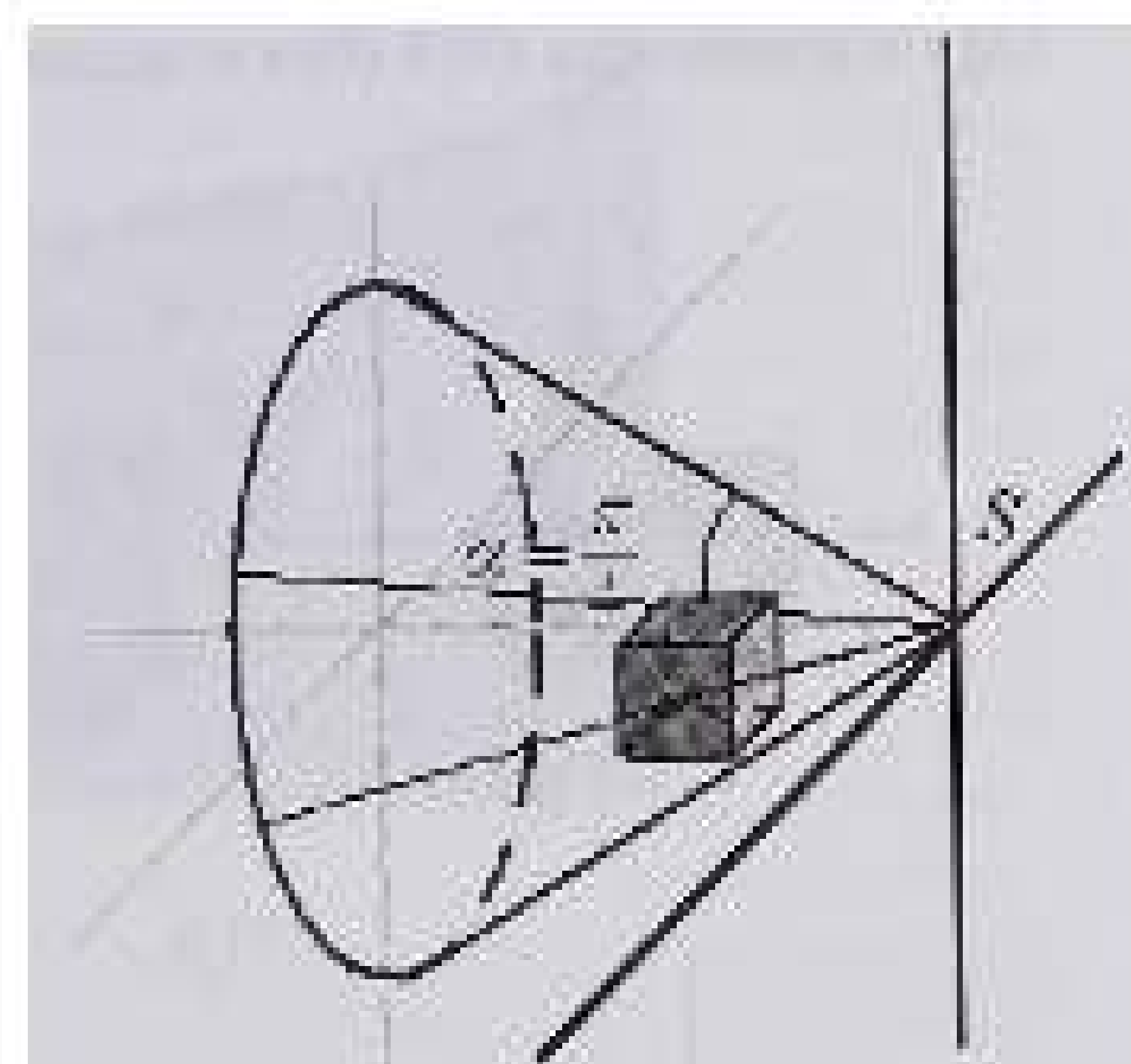


Рис. 8
 Смещение куба по оси Y на 1,4 единицы влево,
 по оси Z – на 1,4 единицы вверх

Видим обратную перспективу. Аналогично можно рассмотреть случай, когда куб находится в отрицательной полуплоскости.



а) зона обратной перспективы



б) зона прямой перспективы

Рис. 9

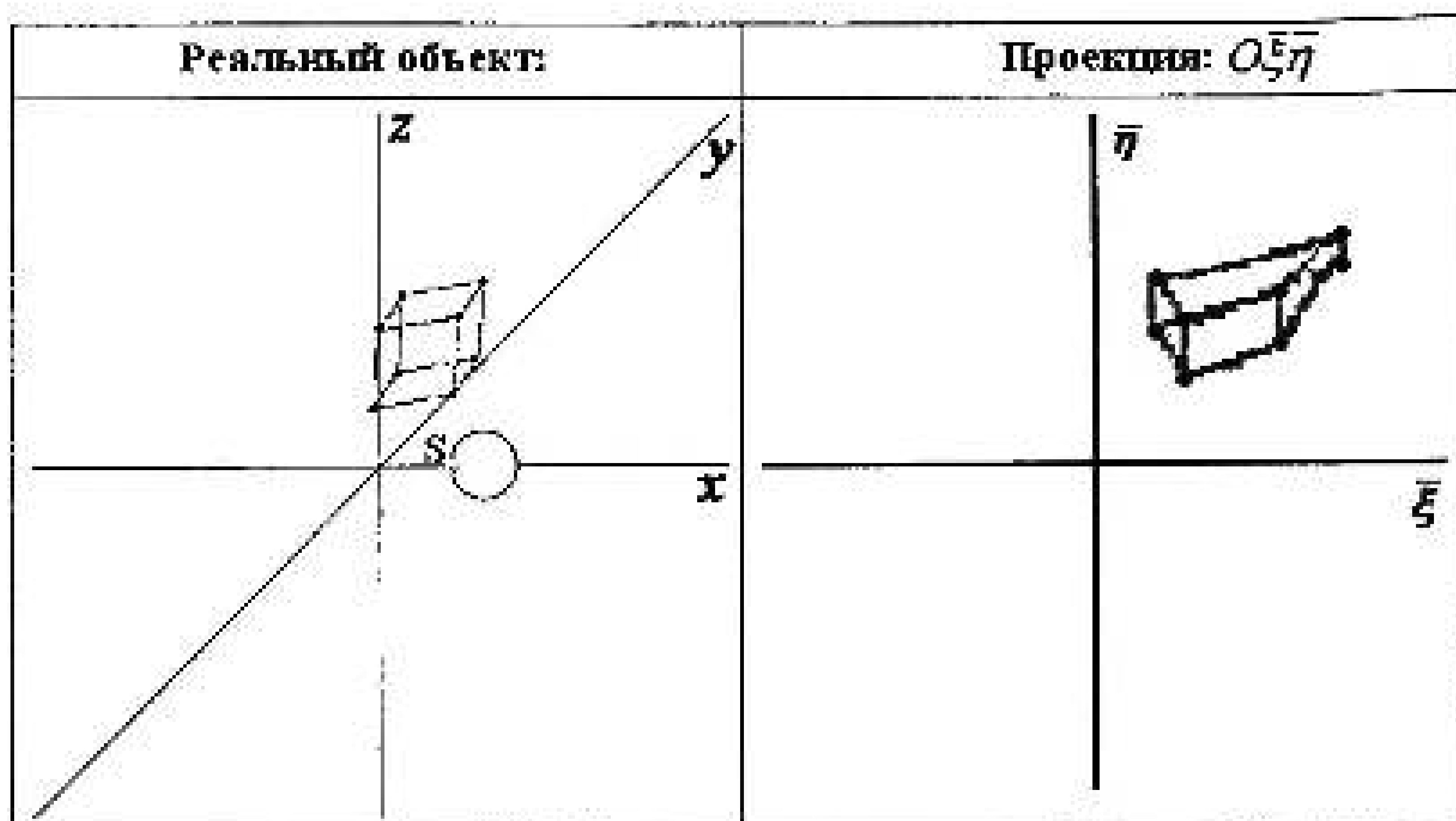


Рис. 10

Сдвиг с вращением в точку начала обратной перспективы (на 1 единицу вправо по оси Y , на 1 единицу вверх по оси Z)

Ниже на рис. показано прямое преобразование изображения в картинной плоскости $O\xi\eta$ в плоскость $\bar{O}\bar{\xi}\bar{\eta}$ (без исходного простран-

ства $Oxyz$), т. е. с использованием только формул (5).

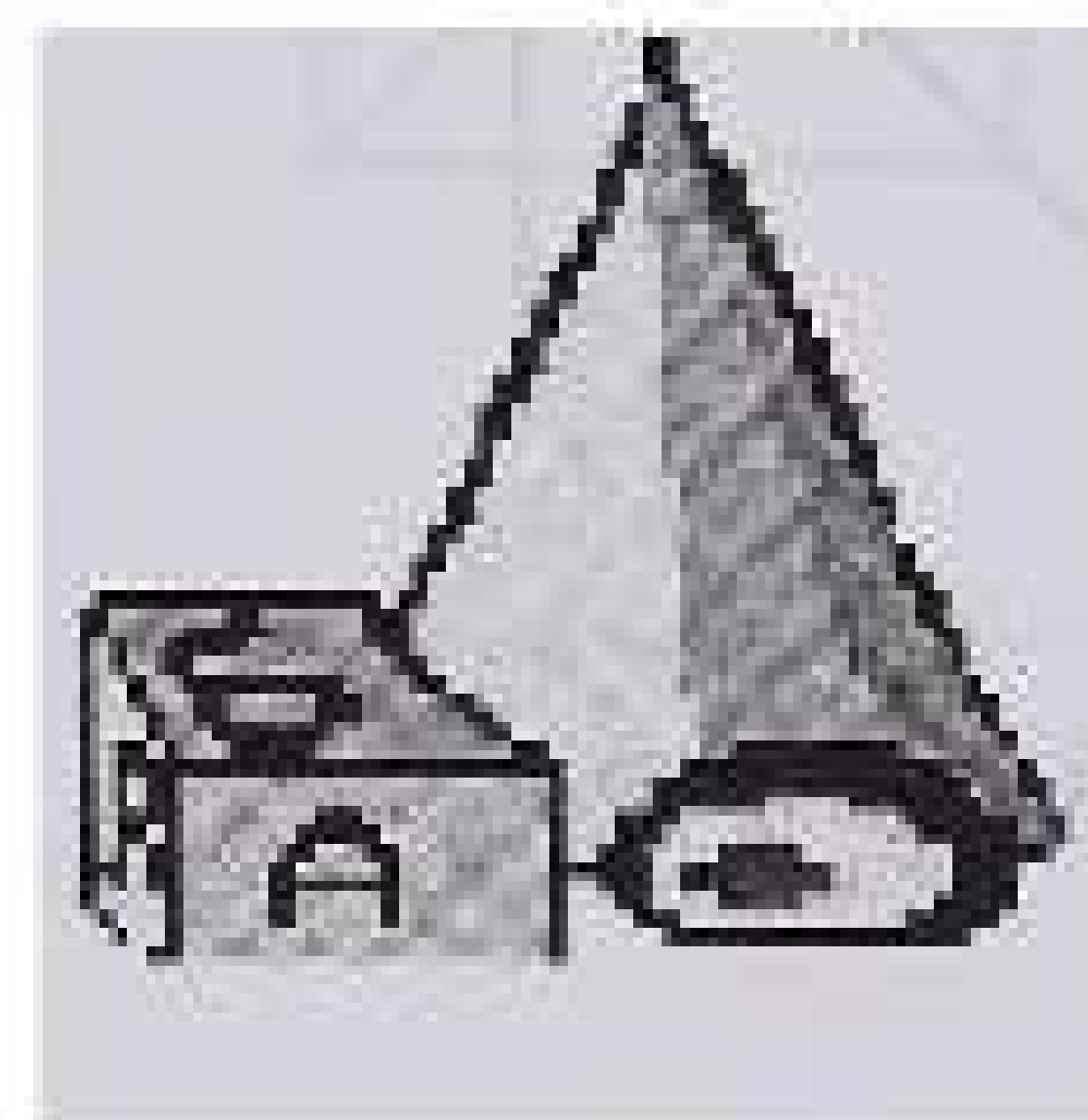
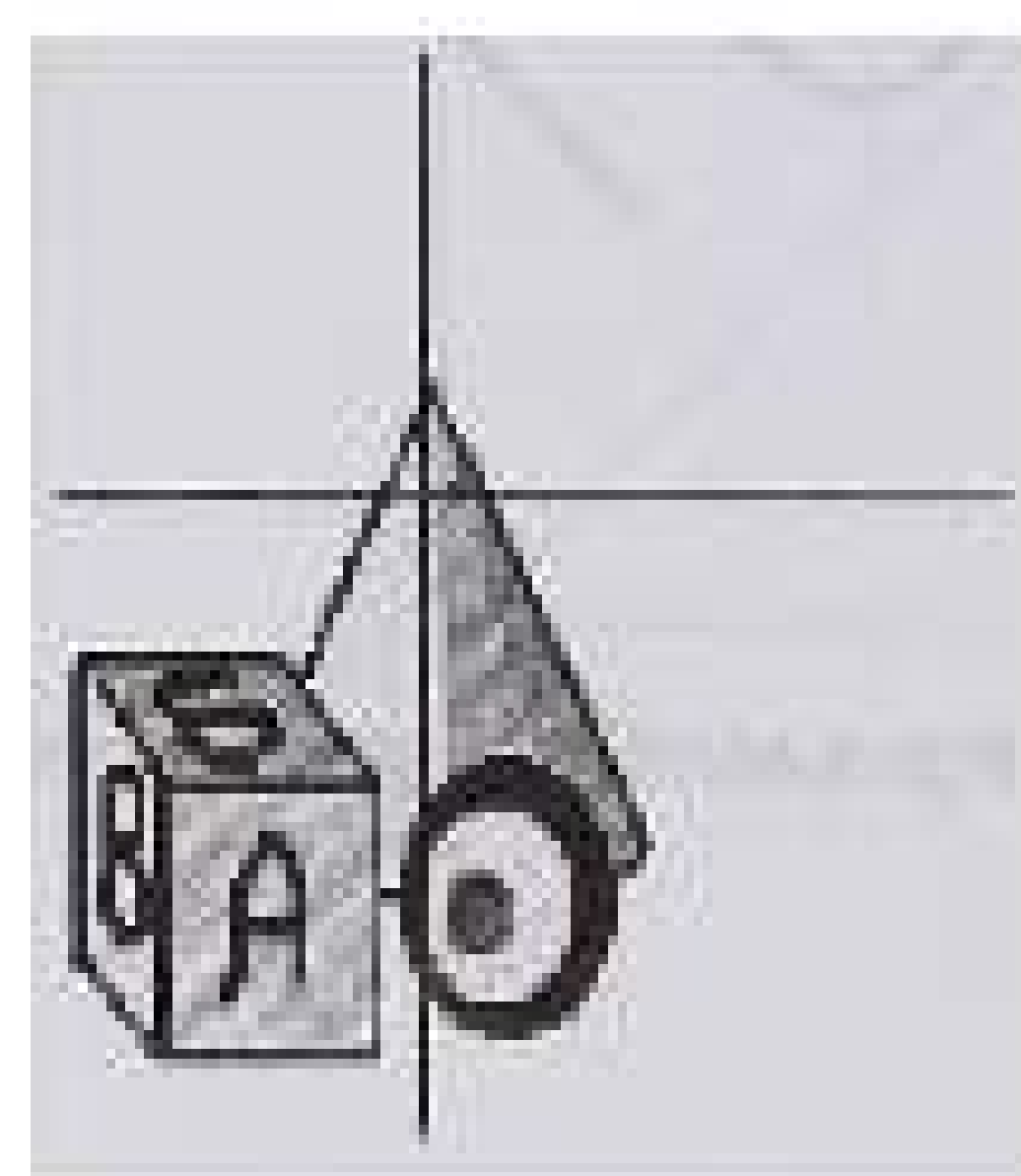
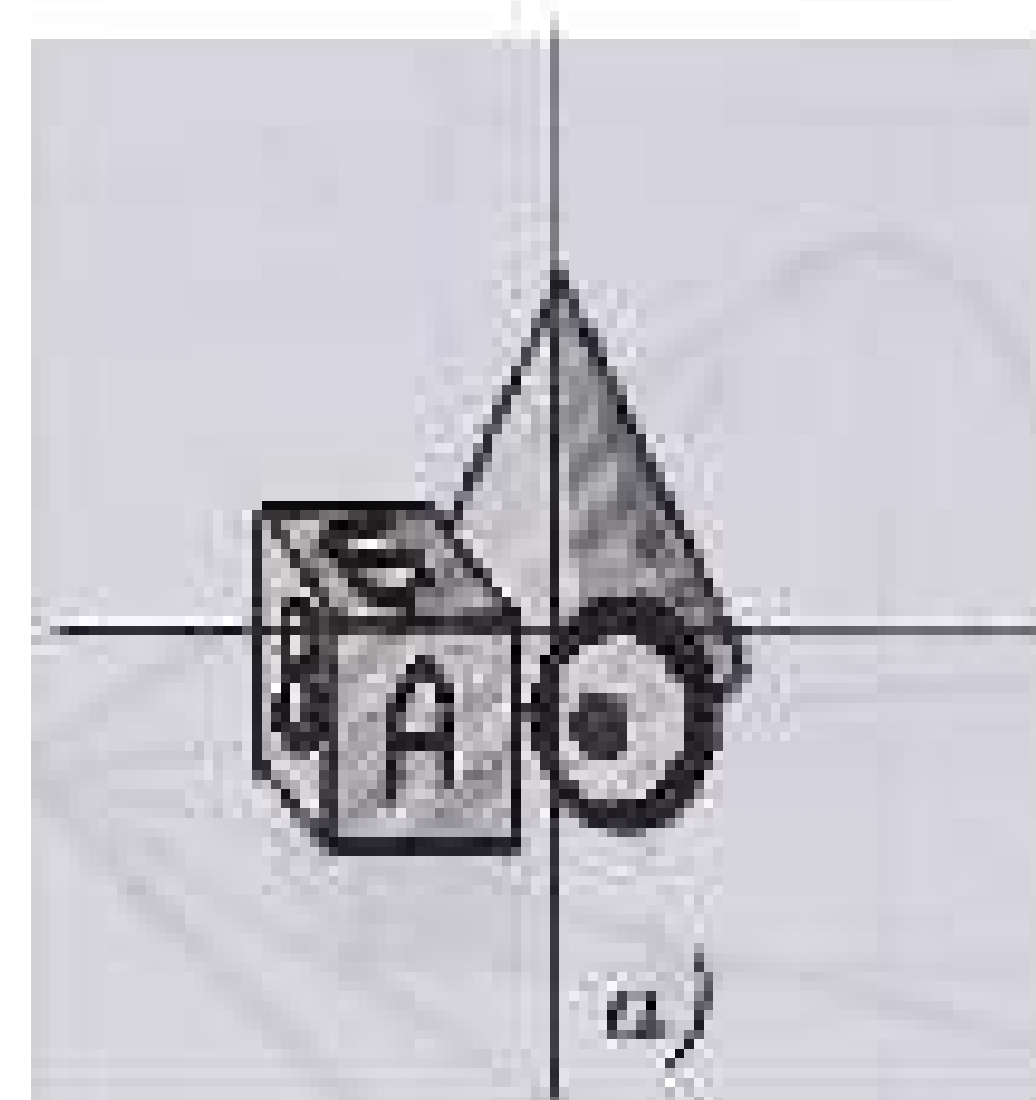


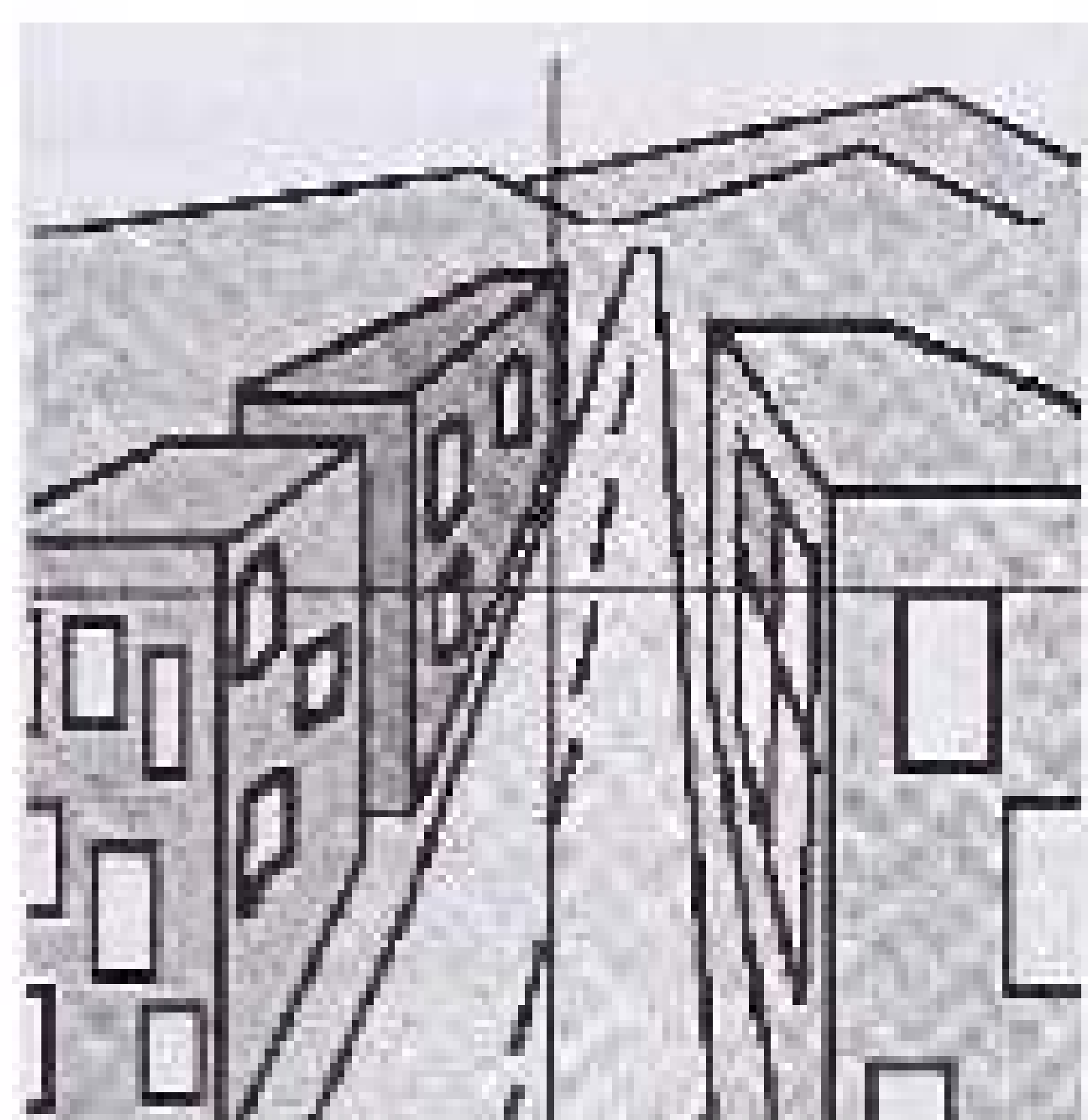
Рис. 11

На рис. 12 (а, б) изображена стандартная «картина» (с линейной прямой перспективой при разных смещениях «наблюдателя»), а на рис. 12 (а', б') приводятся изображения в плоскости $O\xi\eta$.

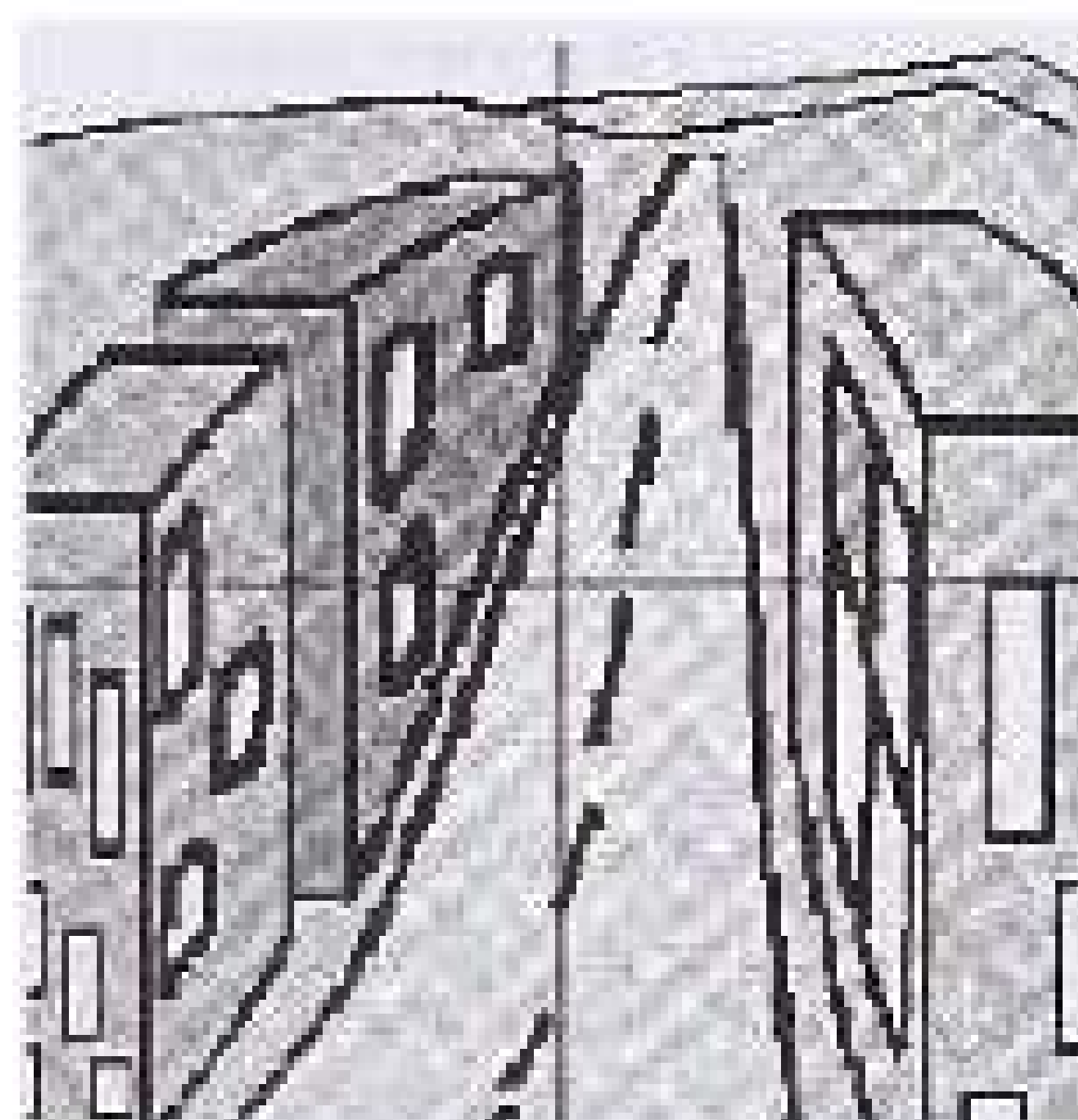
Видны характерные особенности:

– прямая, близкая к прямолинейной, перспектива наблюдается только на достаточно большом расстоянии от наблюдателя, вблизи она становится криволинейной;

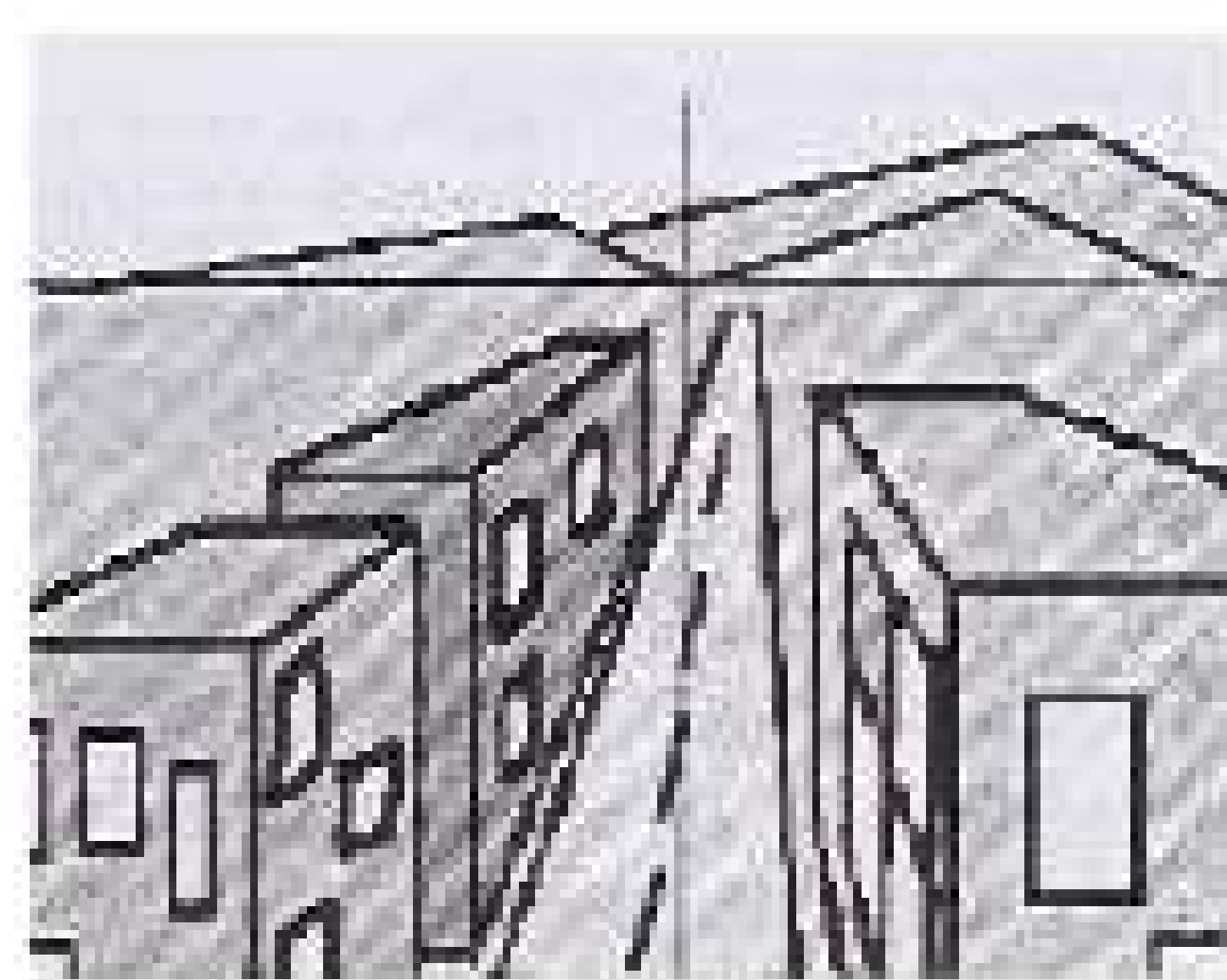
– хорошо видны участки обратной перспективы.



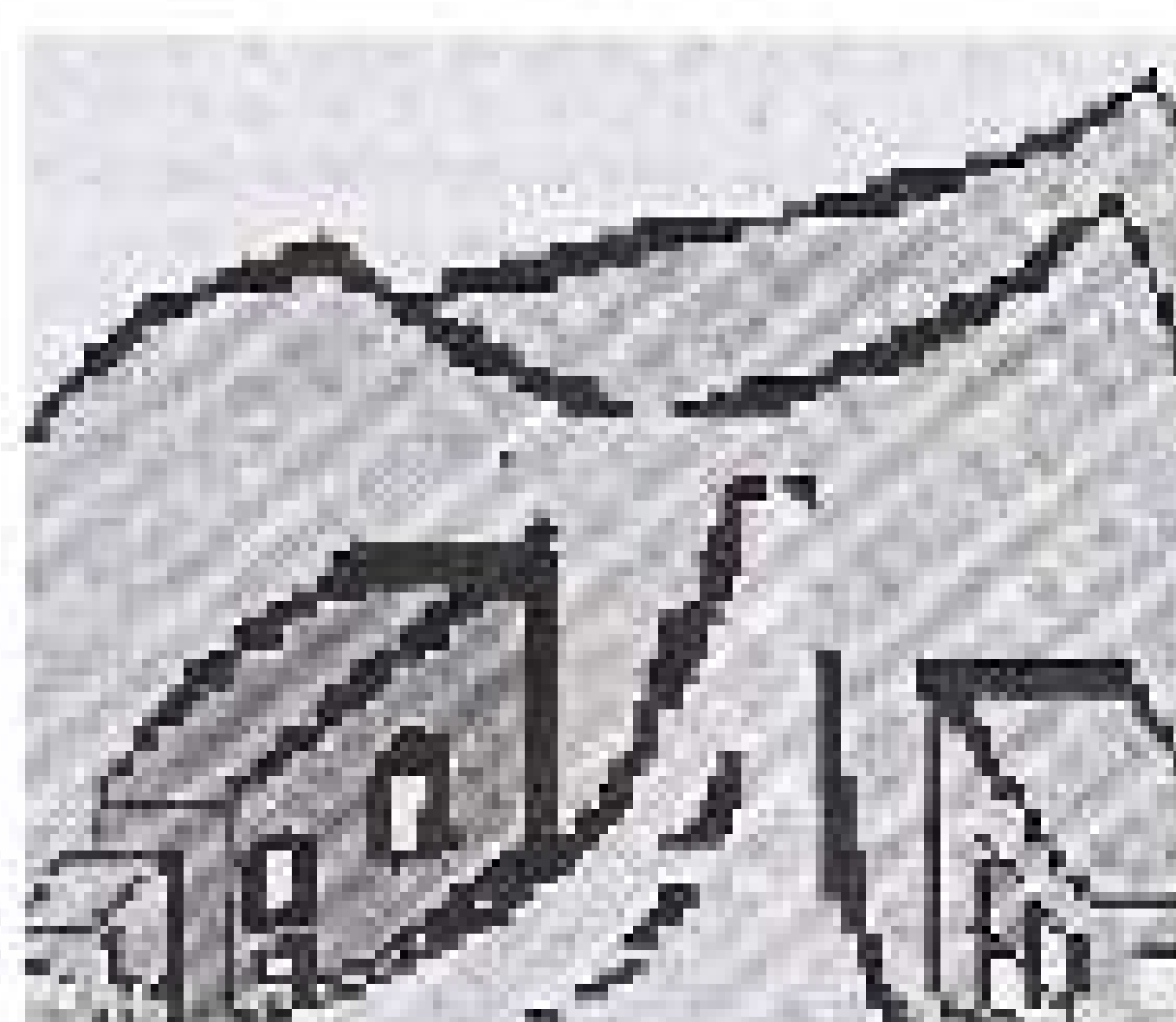
а)



а)'



б)



б)'

Рис. 12

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Раушенбах В. В. Общая теория перспективы / В. В. Раушенбах // Системы перспективы в изобразительном искусстве. – М. : Наука, 1986. – С. 127–253.

Поступила 02.11.10.

СПОСОБ МИНИМИЗАЦИИ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Р. Н. Песков, В. Н. Щенников

Рассмотрена задача минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм. Приведено описание метода, использующего разложение в виде декомпозиционного дерева, для поиска простых импликант. По импликантной матрице строится система ограничений и составляется задача линейного программирования. Предложено использовать разбиение системы ограничений в случае большого количества переменных.

Существует большое количество алгоритмов минимизации булевых функций в классе ДНФ. Их обзор и классификация достаточно полно даются в [3]. Переформулировка задачи минимизации в терминах целочисленного линейного программирования приведена в работе [2]. В настоящей статье предлагается модификация этого метода, которая ускоряет поиск минимальной ДНФ.

Прежде, чем воспользоваться аппаратом линейного программирования, необходимо найти все простые импликанты булевой функции. Введем определения из [1]:

Определение 1. Булева функция $g = g(x_1, \dots, x_n)$ называется импликантой булевой функции $f = f(x_1, \dots, x_n)$, если на любом наборе значений переменных $x_1, \dots, x_n$, на котором значение функции g равно единице, значение функции f также равно единице.

Определение 2. Простой импликантой функции f называется всякое элементарное произведение $g = \tilde{x}_{i_1} \tilde{x}_{i_2} \dots \tilde{x}_{i_r}$, являющееся импликантой булевой функции f , и такое, что никакая его собственная часть (т. е. произведение, получающееся из произведения g вы-

брасыванием одного или нескольких сомножителей $\tilde{x}_{i_j}$) уже не является импликантой функции f .

Для поиска простых импликант в работе [2] предлагается использовать алгоритм Куайна-Мак-Класки, который является наиболее распространенным. В настоящее время существует способ разложения булевой функции в виде декомпозиционного дерева [4], который имеет меньшую временную сложность, чем алгоритм Куайна-Мак-Класки.

Метод заключается в построении дерева всех 2^k возможных декомпозиций функции f от k переменных и применении оператора $\wedge$ в каждом узле дерева.

Декомпозиция есть разбиение функции f на две функции f_0^i и f_1^i , которые определяются положительным и отрицательным значениями входной переменной x_i :

$$D_i: \begin{aligned} f_0^i &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_k) \\ f_1^i &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_k). \end{aligned} \quad (1)$$

Декомпозиция $D_i D_j$ – это комбинация D_i -й и D_j -й декомпозиции:

$$D_i D_j: \begin{aligned} f_{00}^{ij} &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_k) \\ f_{01}^{ij} &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_k) \\ f_{10}^{ij} &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_k) \\ f_{11}^{ij} &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_k). \end{aligned} \quad (2)$$

© Р. Н. Песков, В. Н. Щенников, 2010

Полное описание алгоритма приводится в [4]. Здесь используем его только для определения всех простых импликант в описываемом примере.

Пусть функция f четырех переменных

задана последовательностью нулей и единиц своих значений: 1101010110001100. Будем также получать функции $g_i = f_0^i \wedge f_1^i, i = \overline{1, 4}$. Первый уровень дерева будут составлять декомпозиции D_1, D_2, D_3, D_4 .

$$\begin{array}{llll} D_1: & \begin{array}{l} 11010101 \\ \wedge 10001100 \\ g_1 = 10000100 \end{array} & D_2: & \begin{array}{l} 11011000 \\ \wedge 01011100 \\ g_2 = 01011000 \end{array} & D_3: & \begin{array}{l} 11011011 \\ \wedge 01010000 \\ g_3 = 01010000 \end{array} & D_4: & \begin{array}{l} 10001010 \\ \wedge 11110010 \\ g_4 = 10000010 \end{array} \end{array}$$

Второй уровень:

$$\begin{array}{llll} D_{12}: & \begin{array}{l} 1000 \\ \wedge 0100 \\ g_{12} = 0000 \end{array} & D_{13}: & \begin{array}{l} 1001 \\ \wedge 0000 \\ g_{13} = 0000 \end{array} & D_{14}: & \begin{array}{l} 1000 \\ \wedge 0010 \\ g_{14} = 0000 \end{array} \\ D_{23}: & \begin{array}{l} 0110 \\ \wedge 0100 \\ g_{23} = 0100 \end{array} & D_{24}: & \begin{array}{l} 0010 \\ \wedge 1100 \\ g_{24} = 0000 \end{array} & D_{34}: & \begin{array}{l} 0000 \\ \wedge 1100 \\ g_{34} = 0000 \end{array} \end{array}$$

При последующем разложении все функции g будут равны 00, поэтому нет необходимости построения третьего уровня.

По лемме 3.1 из [4]: если $g(a_{i+1}, \dots, a_k) = 1$, то $p = x_{i+1}^{a_{i+1}} \dots x_k^{a_k}$ импликанта функции f , где

$$x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i, & a_i = 1 \\ \bar{x}_i, & a_i = 0. \end{cases}$$

Тогда, учитывая, что часть импликант первого уровня будет поглощена импликантами второго уровня, для примера, описанного выше, получим 6 простых импликант: $\bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4, x_2 \bar{x}_3 x_4, x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4, \bar{x}_1 x_4, x_1 x_2 \bar{x}_3, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

После того как все простые импликанты были определены, необходимо построить им-

пликантную таблицу. Импликантная таблица функции f представляет собой прямоугольную таблицу, строки которой обозначаются различными простыми импликантами функции f , а столбцы – наборами значений переменных, на которых функция обращается в единицу (конституентами единицы). Правила заполнения импликантной таблицы следующие: на пересечении p -й строки и K -го столбца импликантной таблицы тогда и только тогда ставится метка, когда импликанта p составляет некоторую часть конституенты K (возможно совпадающую со всей конституентой).

Для примера, описанного выше, импликантная матрица имеет вид:

	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$
$x_1 x_4$		*		*	*	*		
$x_1 x_2 \bar{x}_3$			*				*	*
$x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4$			*				*	
$x_2 \bar{x}_3 x_4$					*			*
$\bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	*		*					
$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	*	*						

Если в каком-либо столбце имеется только одна метка, то импликанта, стоящая в соответствующей строке, является существенной – без нее не может быть получено покрытие всего множества импликант данной функции. Так как существенные импликанты в любом случае должны входить в ми-

нимальную форму функции, то можно сразу включить их в минимальную форму и не рассматривать далее. Поэтому можно сократить количество операций, исключив из таблицы соответствующие им строки и столбцы тех конституент, которые покрываются ими. Для рассмотренного выше примера получим:

	$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$
$x_1 x_2 \bar{x}_3$			*	*
$x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4$		*	*	
$x_2 x_3 x_4$				*
$\bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	*	*		
$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	*			

На втором этапе необходимо из простых импликант выбрать минимальное их количество так, чтобы покрывались все конституэнты. Из таблицы получим систему ограничений

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} u_i \geq 1, j = 1, 2, \dots, t, \quad (3)$$

где коэффициент a_{ji} равен 1 или 0 в зависимости от того, стоит ли метка в j -м столбце i -й строке импликантной таблицы, а u_i соответствуют простым импликантам p_i . Для получения кратчайшей ДНФ минимизируется линейная форма

$$J = \sum_{i=1}^m u_i,$$

при условии системы ограничений (3) и что u_i равно 1 или 0.

Для рассматриваемого примера система (3) и форма L будут следующие:

$$\begin{cases} u_4 + u_5 \geq 1, \\ u_2 + u_4 \geq 1, \\ u_1 + u_2 \geq 1, \\ u_1 + u_3 \geq 1. \end{cases}$$

$$L = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5.$$

Таким образом, получается задача целочисленного линейного программирования. В математическом пакете Mathematica с помощью функции LinearProgramming находим решение: $u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 1, u_5 = 0$. Отсюда следует, что в кратчайшую ДНФ будут входить первая и четвертая импликанты. Добавив их к существенной импликанте, определенной ранее, можно получить минимальную ДНФ:

$$x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4.$$

В комментариях к [2] указано, что импликантная таблица будет иметь размеры порядка $m \times t \sim 2^n \times 2^n \cdot n^{\log \log n(1-\varepsilon)}, 0 < \varepsilon < 1$,

$\varepsilon \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ [4]. Поэтому для функций большого количества переменных может потребоваться огромное количество вычислений. В таких случаях предлагается воспользоваться расщеплением ограничений.

Пусть дана система ограничений (1): $A_0 u \geq 1$. Представим матрицу коэффициентов в виде

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение матрицы A_1 и A_2 , т. е.

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица $A_0 = A_{22}$.

Получим две задачи линейного программирования:

$$L_1 = \sum_{i=1}^m u_i^{(1)} \rightarrow \min$$

$$A_1 u^{(1)} \geq 1$$

$$0 \leq x^{(1)} \leq 1$$

и

$$L_2 = \sum_{i=1}^m u_i^{(2)} \rightarrow \min$$

$$A_2 u^{(2)} \geq 1$$

$$0 \leq x^{(2)} \leq 1.$$

Решив их, найдем $\tilde{L} = L_1 + L_2$.

Переставляя строки в импликантной таблице таким образом, чтобы в матрицах A_{13} и A_{31} было больше нулевых элементов, можно добиться, чтобы коэффициент оптимальности $\delta = \frac{\tilde{L}}{L}$ был ближе к 1.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов / В. М. Глушков. – М. : Физматгиз, 1962. – С. 264–267.
2. Майстрова Т. Л. Линейное программирование и задача минимизации нормальных форм булевых функций / Т. Л. Майстрова // Проблемы передачи информации : Сб. – М. : АН СССР, 1962. – Вып. 12. – С. 5–15.
3. Сипоженко А. А. Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм / А. А. Сипоженко, И. П. Чухров // Итоги науки и техники : Сб. – М. : ВИНТИ, 1987. – Т. 25. – С. 68–116.
4. Friedel M. The Decomposition Tree for analyses of Boolean functions / M. Friedel, S. Nikolajewa, T. Wilhelm // Math. Struct. in Comp. Science. – 2008. – Vol. 18. – P. 411–426.

Поступила 25.10.10.

О РАЗВИТИИ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА КАЧЕСТВЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ В ЦЕЛОМ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

А. А. Шестаков, О. В. Дружинина

В настоящей статье обсуждаются результаты качественного исследования в целом динамических систем. Охарактеризованы некоторые перспективы применения указанных результатов для изучения математических моделей естественных и техники. Рассмотрены вопросы об устойчивости и об условиях существования притягивающих и отталкивающих областей силового поля.

Проблемам качественного исследования в целом динамических систем начиная с работ А. М. Ляпунова [8], А. Пуанкаре [20], Ж. Адамара [22] посвящены многочисленные работы [1–7; 9–19; 21; 23 и др.].

Отправляясь от идеи второго метода Ляпунова исследования устойчивости, рассматриваемой в геометрическом аспекте, а также от идеи метода Пуанкаре топографических поверхностей, Н. Д. Моисеев [11–13] разработал метод качественного исследования динамических систем, названный им *методом характеристик контактов*. Сообщение об этом методе Н. Д. Моисеев сделал на Втором Всесоюзном математическом съезде в 1934 г. Метод характеристик контактов представляет собой обобщение метода, разработанного Ж. Адамаром в 1897 г. для обратимых динамических систем. Н. Д. Моисеев разработал метод для необратимых динамических систем.

Независимо друг от друга Ж. Адамар и Н. Д. Моисеев разработали два варианта второго метода Ляпунова качественного исследования в целом динамических систем, опирающиеся на использование пробной (вспомо-

гательной) функции и ее первой и высших орбитальных производных в силу дифференциальных уравнений. Эти варианты назовем соответственно первым и вторым вариантами дифференциального метода Адамара–Моисеева качественного исследования динамических систем. Метод Адамара–Моисеева получил значительное развитие в трудах московской научной школы В. В. Немыцкого [1–2; 7; 9–10; 14–19; 21]. С этими работами тесно связаны работы [4–6].

Поставим вопрос о характере изменения функции вдоль траектории, описываемой точкой, движущейся согласно дифференциальным уравнениям первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{X_1(x_1, \dots, x_n)} &= \dots = \\ &= \frac{dx_n}{X_n(x_1, \dots, x_n)} = dt. \end{aligned} \quad (1)$$

С этой целью запишем вычисляющую в силу уравнений (1) полную производную от пробной функции $V(x_1, \dots, x_n)$ по времени t

© А. А. Шестаков, О. В. Дружинина, 2010

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-08-00826-а).

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n = X(V),$$

являющуюся некоторой функцией от фазовых координат $(x_1, \dots, x_n)$.

Приравнявая это выражение нулю, получаем уравнение поверхности

$$X(V) = 0, \quad (2)$$

являющееся геометрическим местом контактов траекторий с семейством топографических поверхностей $V = \text{const}$ или же геометрическим местом точек пространства R^n , в которых возможно достижение экстремума функции V при движении вдоль траектории уравнений (1).

Далее рассматривается вторая производная пробной функции V , вычисленная также в силу уравнений (1):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V}{dt^2} &= \frac{\partial X(V)}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial X(V)}{\partial x_2} X_2 + \dots + \\ &+ \frac{\partial X(V)}{\partial x_n} X_n = XX(V), \end{aligned}$$

являющаяся также некоторой функцией от фазовых координат. Приравнявая ее нулю, получим уравнение другой поверхности в фазовом пространстве

$$XX(V) = 0. \quad (3)$$

Поверхность (3) пересечется с поверхностью контактов (2) по некоторой линии

$$X(V) = 0, \quad XX(V) = 0, \quad (4)$$

называемой оскулатрисой.

Оскулатриса (4) разделяет поверхность контактов (2) на две части: для одной из этих частей справедливы соотношения

$$X(V) = 0, \quad XX(V) < 0, \quad (5)$$

для другой части справедливы соотношения

$$X(V) = 0, \quad XX(V) > 0. \quad (6)$$

Если рассматривать функцию V как сложную функцию времени t , зависящую от времени через посредство координат точки M , движущейся согласно уравнениям движения (1), то все максимумы такой функции могут достигаться только в точках части пространства, которая определяется неравенством

$$XX(V) \leq 0, \quad (7)$$

или же только в точках совокупности областей (4) и (5). Все минимумы функции V могут достигаться только в области, в которой

$$XX(V) \geq 0, \quad (8)$$

или же — более точно — в области, являющейся совокупностью (4) и (6). Справедливы следующие.

Теорема 1 [22]. Рассмотрим дифференциальные уравнения первого порядка вида (1). Пусть при движении точки M по фазовой траектории уравнений (1) (при изменении t от t_0 до ∞) пробная функция V будет иметь, вообще говоря, бесконечное множество последовательных максимумов и минимумов. Каждая траектория, вообще говоря, должна пересекать бесконечное число раз поверхность контактов (2), переходя при этом из одной части (7) этой поверхности в другую (8).

Теорема 2 [22]. Рассмотрим динамическую систему, определяемую уравнениями вида (1), для которой функции X_i и их производные до второго порядка являются ограниченными. Пусть пробная функция $V(x_1, \dots, x_n)$ и ее производные до третьего порядка остаются ограниченными при неограниченном возрастании t и не имеют при возрастании t бесконечного числа экстремумов. Тогда $V(x_1, \dots, x_n)$ асимптотически стремится к оскулатрисе (4), в том смысле, что по крайней мере для одной из траекторий значение $V(x_1, \dots, x_n)$ с возрастанием времени t произвольно близко подходит к любой точке оскулатрисы.

Будем называть метод качественного исследования, использующий теоремы 1 и 2, первым (фазовым) вариантом метода Адамара-Моисеева. Теоремы 1 и 2 вносят существенный вклад в обобщение и систематизацию методов общего качественного анализа применительно к задаче движения точки в фазовом пространстве и к случаю, когда уравнения движения являются дифференциальными уравнениями первого порядка вида (1). Они представляют большую ценность для теории устойчивости, так как с их помощью в ряде случаев можно легко решать вопрос о неустойчивости заданного состояния равновесия.

Кроме того, Адамар разработал второй (координатный) вариант рассматриваемого метода качественного анализа. В этом варианте речь идет не о фазовом, а о координатном пространстве, в котором движется точка. Уравнения движения записываются в ви-

де лагранжианых уравнений второго порядка, разрешенных относительно вторых производных от координат по времени. Пробная функция выбирается здесь зависящей только от координат, а не от координат и компонент скорости, как это было в фазовом варианте. Но идея метода остается прежней, а именно при помощи второй орбитальной производной от пробной функции по времени, вычисленной в силу дифференциальных уравнений движения, и при помощи условия равенства первой производной нулю стремятся получить областную качественную характеристику или функцию точки в пространстве движения. Знак указанной функции дает возможность различать области возможности максимумов пробной функции от области возможности минимумов той же функции, рассматриваемой как сложная функция времени, зависящая от него через посредство координат движущейся точки.

Отличие исследования А. Кнезера [23] от исследования Ж. Адамара [22] состоит в том, что Адамар вычисляет вторую производную от пробной функции при условии равенства нулю первой производной, тогда как Кнезер этого условия равенства первой производной нулю не использует. Этот факт существенен, так как дает возможность получить вторую производную в виде областной характеристики в пространстве движения, в виде функции точки этого пространства, тогда как в работе Кнезера вторая производная зависит не только от координат, но и от скоростей изменения этих координат. Для получения характеристики Адамара как функции точки в обычном пространстве одного условия равенства нулю первой производной недостаточно. Нужно привлечение еще иных дополнительных условий. Адамар рассмотрел случай задачи движения точки в поле консервативной силы, допускающей потенциальную энергию, зависящую только от координат, причем число степеней свободы равно двум. В этом частном случае для выражения второй производной от пробной функции через одни только координаты оказывается достаточно использовать, кроме условия равенства нулю первой производной, еще интеграл энергии. Это даст два уравнения, из которых компоненты скорости определяются через координаты и постоянную интеграла энергии. Два дифференциальных уравнения движения дают выражения вторых производных от координат через координаты. С помощью этого вторая производная от пробной функции

может быть выражена через одни координаты и через постоянную интеграла энергии. В результате получается величина, которую Н. Д. Моисеев назвал характеристикой контактов траекторий данного изоэнергетического семейства с кривыми топографической системы.

Далее в координатном методе устанавливается для каждого заданного значения постоянной энергии разбиение области возможного движения точки на две части. Одна из них является областью возможности максимумов пробной функции, другая – областью возможности минимумов. Каждая «исключительная» траектория должна поочередно переходить из одной такой области в другую, бесчисленное количество раз пересекая оскулатрису.

Ж. Адамар [22] принял в качестве пробной функции именно потенциальную функцию задачи. С другой стороны, он рассмотрел движение точки не в плоскости, но по некоторой кривой поверхности.

Теорема 3. Пусть существует по крайней мере одна неустойчивая координата. Тогда допускаясь материальная точка, пребывающая в окрестности состояния равновесия, где потенциальная функция не имеет максимума, отклоняется от этого состояния на конечное расстояние. Исключение может иметь место лишь: 1) для траекторий, когда отклонения и скорости тех параметров, которые соответствуют состоянию неустойчивости, являются и продолжатся оставаться достаточно малыми по сравнению с отклонениями и скоростями других параметров; 2) для траекторий, стремящихся асимптотически к рассматриваемому состоянию равновесия, достаточно близкому к равновесию, если такое имеется.

Впрочем, вопросы существования и многообразия упомянутых здесь исключительных движений Адамаром не рассматривались.

В тех случаях, когда имеются только две степени свободы и потенциальная функция имеет минимум, А. Кнезер [23] установил наличие траекторий, асимптотических к положению равновесия. Очевидно, что в общем случае аналогичное рассмотрение было бы значительно более сложным. Так, например, через произвольную точку гиперболического параболоида не проходит траектория, стремящаяся асимптотически к вершине; единственной траекторией, представляющей этот

вид, является парабола, находящаяся в осевом сечении и выпуклая снизу. Имеется в виду, что движение материальной точки происходит по поверхности гиперболического параболоида $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$, причем положительная ось z направлена вертикально вверх.

Рассмотрим далее общий характер движения консервативной голономной системы. Для простоты примем, что материальная точка единичной массы движется по гладкой поверхности под действием сил с потенциалом Π . Обозначим через u и v параметры, определяющие точки на поверхности, элемент длины которой определяется формулой

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2,$$

где E , F , G — заданные функции от u и v . Точка обладает кинетической энергией $T = \frac{1}{2}(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)$. Рассмотрим на траектории голономной системы точку, в которой потенциал Π имеет минимум. Очевидно, что в этой точке $\Pi = 0$ и вторая производная $\ddot{\Pi}$ к силу лагранжевых уравнений движения положительна. Если точка описывает траекторию, то пробная функция Π либо принимает бесчисленное множество чередующихся друг за другом максимумов и минимумов (общий случай), либо начиная с определенной точки изменяется в одном направлении (частный случай). Допустим сначала, что имеет место общий случай. Разложим поверхность на две такие области, что в одной из них $I_{\Pi} > 0$, а в другой $I_{\Pi} < 0$, где I_{Π} — функция, имеющая стандартный явный вид. Из вышесказанного следует, что первая из этих областей содержит все точки траекторий, в которых Π имеет минимум, т. е., вообще говоря, бесчисленное множество отрезков траекторий, каждый из которых имеет конечную длину. Но во второй области, где $I_{\Pi} < 0$, материальная точка не может оставаться постоянно. Поэтому обе эти области называются в [22] соответственно притягивающей и отталкивающей областями. В общем случае существуют одновременно обе эти области, так как нетрудно показать, что все изолированные точки поверхности, в которых Π имеет минимум, т. е. точки, в которых возможно устойчивое равновесие, принадлежат притягивающей области, а все точки, в которых Π имеет максимум, принадлежат отталкивающей области.

Предположим теперь, что имеет место второй случай, т. е. что начиная с некоторо-

го момента времени функция Π изменяется в одном направлении. Будем предполагать, что поверхность нигде не уходит в бесконечность и не имеет особых точек, а функция Π правильна во всех точках поверхности. Так как функция Π изменяется в одном направлении, то она necessarily стремится к некоторому определенному пределу, а первая и вторая производные $\dot{\Pi}$ и $\ddot{\Pi}$ стремятся к нулю. Следовательно, если на поверхности существует только конечное число состояний равновесия (что, как правило, действительно имеет место), то материальная точка приближается к одному из этих состояний со скоростью, стремящейся к нулю. Такое состояние равновесия будет неустойчивым, так как при обращении движения материальная точка, находясь в начальный момент вблизи состояния равновесия и имея малую скорость, будет с течением времени удаляться от этого состояния, что противоречит определению устойчивости. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4 [22]. Пусть материальная точка свободно движется по поверхности, нигде не уходящей в бесконечность и не имеющей особых точек; пусть, кроме того, потенциальная энергия есть функция правильная во всех точках поверхности и имеет на ней только конечное число экстремумов. Тогда либо длина отрезка траектории, лежащего в притягивающей области, превышает каждое заданное число, либо траектория асимптотически приближается к состоянию равновесия неустойчивого состояния равновесия.

Сравним заключение теоремы 4 с результатом при движении точки по заданной кривой под действием силы, зависящей только от положения. В этом случае точка либо описывает бесконечно большой путь в определенном направлении, либо колеблется около состояния устойчивого равновесия. Притягивающая область при движении с двумя степенями свободы соответствует состоянию устойчивого равновесия при движении с одной степенью свободы.

Описанные выше фазовый и координатный методы являются важными для практических приложений вариантами второго метода Ляпунова, причем фазовый метод целесообразно использовать для решения задач устойчивости неуправляемых и управляемых технических систем, а координатный метод — для решения задач устойчивости систем небесной механики. Фазовый метод не-

следования устойчивых свойств в монографии [21] распространены на распределенные динамические системы различных типов (стохастические, нечеткие распределенные системы и др.)

Исследования В. В. Немыцкого, известного ученого и неутомимого пропагандиста качественных исследований в целом с помощью второго метода Ляпунова, содержатся в статьях [14–18], а исследования учеников и последователей В. В. Немыцкого – в [1–2; 7; 9–10; 19; 21] и др. работах. Идея о вращающейся функции Ляпунова развита в [15]. С помощью вращающейся функции возможно исследовать фазовые портреты траекторий в случае отсутствия асимптотической устой-

чивости. В. В. Немыцкий разработал общий метод качественного исследования в целом свойств траекторий на плоскости при наличии одной особой точки и предложил топологическую классификацию особых точек и обобщенных функций Ляпунова. Е. А. Барбаши [1–2], развивая идеи работ В. В. Немыцкого о структуре вполне неустойчивых динамических систем, показал, что вопрос о нахождении простейшей структуры выпрямляемой системы решается вторым методом Ляпунова. Пользуясь методами В. В. Немыцкого, его ученики и последователи внесли весомый вклад в качественные методы исследования в целом траекторий динамических систем с помощью второго метода Ляпунова.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Барбаши Е. А. О динамических системах, обладающих потенциалом скоростей / Е. А. Барбаши // ДАН СССР. – 1948. – Т. 61, № 2. – С. 185–187.
2. Барбаши Е. А. Метод исчислений в теории динамических систем / Е. А. Барбаши // Мат. сб. – 1951. – Т. 29, № 2. – С. 233–280.
3. Боль П. О движении механической системы вблизи положения равновесия / П. Боль // Собр. тр. – Рига : Зинатне, 1974. – С. 193–290.
4. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение / В. И. Зубов. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1957. – 241 с.
5. Козлов В. В. Методы А. М. Ляпунова и их применение / В. В. Козлов. – М. : Изд-во МГУ, 1980.
6. Красовский Н. Н. Некоторые задачи устойчивости движения / Н. Н. Красовский. – М. : Физматгиз, 1959. – 212 с.
7. Кудасев М. Б. Классификация многомерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом функций Ляпунова / М. Б. Кудасев // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 3. – С. 346–356.
8. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. – Харьков : Изд-во Харьков. мат. о-ва, 1892. – 250 с.
9. Малышев Ю. В. Методы обобщенных функций Ляпунова : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Ю. В. Малышев. – Свердловск, 1991.
10. Мовшович С. М. Об определении области влияния некоторых особых точек высшего порядка / С. М. Мовшович // Вестн. Моск. ун-та. – 1959. – № 6. – С. 3–11.
11. Моисеев Н. Д. О несуществовании одного из ограничений, налагаемых на топографические системы в теории устойчивости по Ляпунову / Н. Д. Моисеев // ДАН СССР. – 1936. – Т. 10, № 4. – С. 121–125.
12. Моисеев Н. Д. О проблеме локализации динамических фазовых траекторий / Н. Д. Моисеев // ДАН СССР. – 1937. – Т. 13, № 6. – С. 297–300.
13. Моисеев Н. Д. Очерки развития теории устойчивости / Н. Д. Моисеев. – М. : Л. : ГИТТЛ, 1949. – 663 с.
14. Немыцкий В. В. Некоторые методы качественного исследования в «большом» многомерных автономных систем / В. В. Немыцкий // Труды ММО. – 1956. – Т. 5. – С. 455–482.
15. Немыцкий В. В. Метод вращающихся функций Ляпунова для разыскания колебательных режимов / В. В. Немыцкий // ДАН СССР. – 1957. – Т. 97. – С. 33–36.
16. Немыцкий В. В. Колебательные режимы многомерных динамических систем / В. В. Немыцкий // Симпозиум по нелинейным колебаниям. – Киев : Изд-во АН УССР, 1961. – С. 179–194.
17. Немыцкий В. В. Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий // УМН. – 1965. – Т. 20, вып. 4 (124). – С. 3–35.
18. Немыцкий В. В. Топологическая классификация особых точек и обобщенных функций Ляпунова / В. В. Немыцкий // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 3. – С. 359–370.
19. Папуш П. Н. Изучение расположения интегральных кривых, заполняющих область, содержащую одну особую точку / П. Н. Папуш // Мат. сб. – 1956. – Т. 38 (80), № 3. – С. 337–358.
20. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре. – М. ; Л. : ОГИЗ, 1947. – 385 с.

21. Шестаков А. А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами / А. А. Шестаков. – М. : УРСС, 2007. – 320 с.
22. Hadamard J. Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique / J. Hadamard // Journal de mathématique. 5me serie. – 1897. – Т. III. – P. 331–387.
23. Kneser A. Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslage / A. Kneser // Journal für reine Mathematik. – 1898. – Bd. 118. – S. 186–223.

Поступила 15.10.10.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ МЕТОДА ФРОММЕРА НА МНОГОМЕРНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ*

О. В. Дружинина, А. А. Шестаков

В статье рассмотрена конструкция многоугольной диаграммы показателей степеней аналитической дифференциальной системы. С помощью указанной диаграммы метод Фроммера исследования двумерной системы обобщен на многомерные аналитические дифференциальные системы.

Рассмотрим сильно нелинейную дифференциальную систему вида

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \quad x \in R^n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

где вектор-функция $g(x)$ является достаточно гладкой функцией.

Асимптотика решений дифференциальной системы (1) при различных предположениях на правую функцию изучалась в [1–10] и других работах.

В настоящей статье рассмотрен случай, когда координатами $g_s(x)$ вектор-функции $g(x)$ являются аналитические функции координат точки x , причем в степенных рядах отсутствуют свободные члены и члены первой степени. Индекс s всюду в этой статье принимает значения $1, 2, \dots, n$, система (1) в этом случае является сильно нелинейной аналитической системой.

Рассмотрим конструкцию, которую назо-

вем *многоугольной диаграммой показателей степеней* (сокращенно *НДПС*) для аналитической системы (1). В работе [8] эта конструкция названа также *многомерным полигоном Ньютона*. В работах [1–5] рассмотрена родственная к НДПС конструкция, которая названа *многоугольником Ньютона*.

В x -пространстве R^n рассмотрим n классов L_s точек $(\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{s,s-1}, \alpha_{s,s} = 1, \alpha_{s,s+1}, \dots, \alpha_{sn})$, отвечающих всем отличным от нуля коэффициентам $a_{s\alpha}$ в разложении

$$g_s(x) = \sum a_{s\alpha} x_1^{\alpha_{s1}} x_2^{\alpha_{s2}} \dots x_n^{\alpha_{sn}}, \quad (2)$$

где $a_{s\alpha}$ постоянны и суммирование распространено на все целые положительные числа α_{sj} . Точки, принадлежащие каждому классу L_s , лежат внутри или на границах n -мерного конуса K , образованного n плоскостями-квадрантами $x_i = -1, x_j \geq -1, i \neq j, i, j = 1, \dots, n$ и имеющего вершину в точ-

© О. В. Дружинина, А. А. Шестаков, 2010

* Работа поддержана Фондом содействия отечественной науке и РФФИ (проект № 10-08-00826-а).

ке $(-1, -1, \dots, -1)$. Предположим, что существует $(n-1)$ -мерная плоскость Π пересекающая все n ребер n -мерного конуса так, что внутри образованного $(n-1)$ -мерного многогранника нет точек ни одного класса L_s , но на плоскости Π этого многогранника лежит по крайней мере одна точка из каждого класса L_s .

Так как n точек однозначно определяет $(n-1)$ -мерную плоскость, то в общей ситуации соответствующим перемещением плоскости, проходящей по крайней мере через одну из точек каждого класса L_s , будет получена плоскость Π . Поэтому рассматриваемый случай является общим. Координаты точек каждого класса L_s , лежащих на плоскости Π , будем обозначать буквой β , а координаты всех остальных точек – буквой γ . Уравнение плоскости Π запишем в виде

$$p_1 x_1 + \dots + p_n x_n = p, \quad p > 0, \quad p_s > 0.$$

Так как числа p_s и p рациональны, то будем предполагать, что координаты p_s нормального вектора $(p_1, \dots, p_n)$ плоскости Π и свободный член p не имеют общего делителя, отличного от единицы. При этом условия числа p_s , p определены однозначно. В силу свойств плоскости Π будем иметь соотношения

$$\sum_k (\beta_{sk} - \delta_{sk}) p_k = p, \quad \sum_k (\gamma_{sk} - \delta_{sk}) p_k > p. \quad (3)$$

Рассмотрим укороченную дифференциальную систему, соответствующую конусу K_s

$$\frac{dx_s}{dt} = \varphi_s(x_1, \dots, x_n), \quad (4)$$

где многочлены $\varphi_s(x)$ определены формулами

$$\varphi_s(x) = \sum a_{s\beta_1\beta_2\dots\beta_n} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}, \quad (5)$$

причем суммирование распространено на точки, лежащие в плоскости Π . Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости тождества

$$\varphi_s(\lambda^{p_1} x_1, \dots, \lambda^{p_n} x_n) = \lambda^{p+p_s} \varphi_s(x_1, \dots, x_n) \quad (6)$$

для любого вещественного числа $\lambda \in (-\infty, +\infty)$.

Функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющие свойству (6), назовем квазиоднородными.

Будем искать решение укороченной дифференциальной системы (4) в виде

$$x_s^* = \omega_s(c+t)^{\tau p_s}, \quad (7a)$$

$$\bar{x}_s = \bar{\omega}_s(c-t)^{\tau p_s}, \quad (7b)$$

где $\omega_s, \bar{\omega}_s, \tau, c > 0$ – некоторые постоянные.

Подставляя (7a) и (7b) в систему (4), соответственно получим:

$$\tau p_s \omega_s (c+t)^{\tau p_s-1} = (c+t)^{\tau(p+p_s)} \varphi_s(\omega_1, \dots, \omega_n),$$

$$-\tau p_s \bar{\omega}_s (c-t)^{\tau p_s-1} = (c-t)^{\tau(p+p_s)} \varphi_s(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n).$$

Последние соотношения будут выполнены в том и только в том случае, если положить $\tau p_s - 1 = \tau(p+p_s)$, т. е. $\tau = -1/p$, и если $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ и $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n)$ являются решениями соответственно систем алгебраических уравнений

$$p_s \omega_s + p \varphi_s(\omega_1, \dots, \omega_n) = 0, \quad (8a)$$

$$p_s \bar{\omega}_s + p \varphi_s(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n) = 0. \quad (8b)$$

Уравнения (8a) и (8b) назовем определяющими, а вещественные решения системы (4) вида (7a) и (7b) – простейшими решениями.

Для простейших решений (7a) и (7b) имеем: $|x^*| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty, |\bar{x}| \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty$, т. е. решение (7a) является O^+ -решением, а решение (7b) – O^- -решением.

Для того чтобы изучить решения системы (1), стремящиеся при $t \rightarrow \pm\infty$ к простейшим решениям (7a) и (7b) системы первого приближения (4), введем в системе (1) новую независимую переменную

$$\tau = (c+t)^{-1/p}, \quad (9a)$$

$$\text{соответственно } \bar{\tau} = (c-t)^{-1/p},$$

и произведем замену искомых функций

$$x_s = (y_s + \omega_s) \tau^{p_s}, \quad (9b)$$

$$\text{соответственно } \bar{x}_s = (\bar{y}_s + \bar{\omega}_s) \bar{\tau}^{p_s},$$

где ω и $\bar{\omega}$ – вещественные решения определяющих уравнений (8a) и (8b). Тогда для определения новых искомых функций y_s и $\bar{y}_s$ получим следующие дифференциальные системы

$$\tau \frac{dy_s}{d\tau} = -p \sum \varphi_{sj}(\omega) y_j - p_s y_s +$$

$$+ Y_s(\tau, y_1, \dots, y_n),$$

$$\bar{\tau} \frac{d\bar{y}_s}{d\bar{\tau}} = p \sum \varphi_{sj}(\bar{\omega}) \bar{y}_j - p_s \bar{y}_s +$$

$$+ \bar{Y}_s(\bar{\tau}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n),$$

матрицы которых соответственно имеют вид

$$\| -p\varphi_{sj}(\omega) - \delta_{sj} p_s \|, \quad (12)$$

$$\| p\varphi_{sj}(\bar{\omega}) - \delta_{sj} p_s \| \quad (13)$$

и функции Y_s и $\bar{Y}_s$ удовлетворяют условиям

$$|Y_s(\tau, y)| < \alpha_1 h + \beta_1, \quad (14a)$$

$$0 \leq \tau \leq \tau_0, \quad |y| \leq h,$$

$$|\bar{Y}_s(\bar{\tau}, \bar{y})| < \alpha_2 h + \beta_2, \quad (14b)$$

$$0 \leq \bar{\tau} \leq \tau_0, \quad |\bar{y}| \leq h,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — положительные константы, которые могут быть сколь угодно малыми в зависимости от выбора τ_0 и h .

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть для аналитической системы (1) существует НДПС. Если число p четное, все числа p_s нечетные и k характеристическое число матрицы (12) (соответственно матрицы (13)) имеют положительную вещественную часть, то вдоль параболы $x_s = \omega_s \tau^{p_s}$, $\tau > 0$ (соответственно $x_s = \bar{\omega}_s \bar{\tau}^{p_s}$, $\bar{\tau} > 0$) в точку 0 входит семейство O^+ -решений (соответственно O^- -решений) размерности k , а вдоль параболы $x_s = -\omega_s \tau^{p_s}$, $\tau > 0$ (соответственно $x_s = -\bar{\omega}_s \bar{\tau}^{p_s}$, $\bar{\tau} > 0$) в точку 0 входит семейство O^+ -решений (соответственно O^- -решений) той же самой размерности k .

Теорема 2. Пусть для системы (1) существует НДПС. Если же все числа p и p_s нечетные и k характеристическое число матрицы (12) имеют положительную вещественную часть, то вдоль параболы $x_s = \omega_s \tau^{p_s}$, $\tau > 0$ в точку 0 входит семейство O^+ -решений размерности k , а вдоль параболы $x_s = -\omega_s \tau^{p_s}$, $\tau > 0$ в точку 0 входит семейство O^+ -решений размерности k .

Доказательство. Полагая в соотношениях (6) $\lambda = -1$, получим

$$\varphi_s(\omega_1(-1)^{p_1}, \dots, \omega_n(-1)^{p_n}) = (-1)^{p+p_s} \varphi_s(\omega_1, \dots, \omega_n). \quad (15)$$

Пусть число p четное и все числа p_s нечетные. Тогда из (15) следует, что функции $\varphi_s(x)$ являются нечетными, и векторы ω и $-\omega$ будут решениями определяющих уравнений (8a). С другой стороны, легко показать, что функции $\varphi_s(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$p_1 x_1 \varphi_{s1}(x) + \dots + p_n x_n \varphi_{sn}(x) = (p + p_s) \varphi_s(x). \quad (16)$$

В силу (16) частные производные $\varphi_{sk}(x)$ являются четными функциями, и, следовательно, $\varphi_{sk}(-\omega) = \varphi_{sk}(\omega)$.

Пусть теперь все числа p, p_s четные. Если вектор ω является решением уравнений (8a), то вектор $-\omega$ будет решением уравнений (8b). Производя в системе (1) поочередно замену переменных

$$\tau = (c + t)^{-1/p}; \quad x_s = (y_s + \omega_s) \tau^{p_s}; \quad t \rightarrow +\infty, \quad \tau \rightarrow 0, \quad (17a)$$

$$\bar{\tau} = (c - t)^{-1/p}; \quad x_s = (\bar{y}_s - \omega_s) \bar{\tau}^{p_s}; \quad t \rightarrow +\infty, \quad \bar{\tau} \rightarrow 0, \quad (17b)$$

получим для определения функций y_s систему вида (10), а для определений функций $\bar{y}_s$ дифференциальную систему

$$\bar{\tau} \frac{d\bar{y}_s}{d\bar{\tau}} = p \sum \varphi_{sj}(-\omega) \bar{y}_j - p_s \bar{y}_s + \bar{Y}_s^*(\bar{\tau}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n), \quad (18)$$

матрица которой имеет вид

$$\|p\varphi_{sj}(-\omega) - \delta_{sj}p_s\| \quad (19)$$

и функции $Y_s^*(\bar{\tau}, \bar{y})$ удовлетворяют условиям типа (14).

В силу (15) и (16) функции $\varphi_s(x)$ являются четными, а все частные производные $\varphi_{sj}(x)$ — нечетными. Следовательно, $\varphi_{sj}(-\omega) = -\varphi_{sj}(\omega)$ и матрицы (12) и (19) совпадают.

Очевидно, что если какая-либо из дифференциальных систем (10), (11), (18) имеет семейство O -решений $y_s = y_s(\tau)$ размерности k , то система (1) имеет семейство O -решений $x_s = x_s(t)$ той же самой размерности k , обладающее свойством $x_s - \omega_s \tau^{p_s} = o(\tau^{p_s})$. Теоремы 1 и 2 доказаны.

Справедливы следующие теоремы 3–6, являющиеся следствиями теорем 1 и 2.

Теорема 3. Пусть для аналитической системы (1) существует НДПС. Пусть p — число четное и среди p_s имеются как четные, так и нечетные числа. В этом случае решением ($\omega_1, \dots, \omega_n$) уравнений (8a) (соответственно решению ($\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$) уравнений (8b)) соответствует, в силу (15), решение $((-1)^{p_1} \omega_1, \dots, (-1)^{p_n} \omega_n)$ уравнений (8a) (соответственно решение $((-1)^{p_1} \bar{\omega}_1, \dots, (-1)^{p_n} \bar{\omega}_n)$ уравнений (8b)). При этом рассматриваемым решениям соответствуют матрицы

$$\| -p\varphi_{sj}((-1)^{p_1} \omega_1, \dots, (-1)^{p_n} \omega_n) - \delta_{sj}p_s \|, \quad (12a)$$

$$\|p\varphi_{s,j}((-1)^{p_1}\omega_1, \dots, (-1)^{p_n}\bar{\omega}_n) - \delta_{s,j}p_s\|. \quad (13a)$$

Теорема 4. Пусть для аналитической системы (1) существует НДПС. Пусть p – число четное, и матрицы (12) и (12a) (соответственно матрицы (13) и (13a) имеют соответственно k_1 и k_2 характеристических числа с положительными вещественными частями. Тогда вдоль параболы $x_s = \omega_s \tau^{p_1}$, $\tau > 0$ (соответственно $x_s = \bar{\omega}_s \bar{\tau}^{p_1}$, $\bar{\tau} > 0$) в точку 0 входит семейство O^+ -решений (соответственно O^- -решений) размерности k_1 , а вдоль параболы $x_s = (-1)^{p_1}\omega_s \tau^{p_1}$, $\tau > 0$ (соответственно $x_s = (-1)^{p_1}\bar{\omega}_s \bar{\tau}^{p_1}$, $\bar{\tau} > 0$) в точку 0 входит семейство O^+ -решений (соответственно O^- -решений) размерности k_2 .

Теорема 5. Пусть для аналитической системы (1) существует НДПС. Пусть p – число нечетное и среди p_s имеются как четные, так и нечетные числа. В этом случае решению $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ уравнений (8a) (соответственно решению $(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n)$ уравнений (8b)) соответствует в силу (15) решение $((-1)^{p_1}\omega_1, \dots, (-1)^{p_n}\omega_n)$ уравнений (8b) (соответственно решение $((-1)^{p_1}\bar{\omega}_1, \dots, (-1)^{p_n}\bar{\omega}_n)$ уравнений (8a)). На-

ряду с матрицей (12a) рассмотрим матрицу

$$|p\varphi_{s,j}((-1)^{p_1}\omega_1, \dots, (-1)^{p_n}\omega_n) - \delta_{s,j}p_s|. \quad (19a)$$

Если матрицы (12) и (19) совпадают, то матрицы (12a) и (19a), вообще говоря, различны.

Теорема 6. Пусть для аналитической системы (1) существует НДПС. Пусть p – число нечетное и матрицы (12a) и (19b) имеют соответственно k_1 и k_2 характеристических чисел с положительными вещественными частями. Тогда вдоль параболы $x_s = \omega_s \tau^{p_1}$, $\tau > 0$ в точку 0 входит семейство O^+ -решений размерности k_1 , а вдоль параболы $x_s = (-1)^{p_1}\omega_s \tau^{p_1}$, $\tau > 0$ в точку 0 входит семейство O^- -решений размерности k_2 .

Развитый в статье метод исследования асимптотики решений аналитической системы (1) с помощью НДПС является обобщением метода Фроммера исследования плоской дифференциальной системы на многомерную дифференциальную систему (1). Результаты статьи являются уточнением и развитием результатов статьи [16].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Веклемишева Л. А. О системах дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Л. А. Веклемишева. – Киев, 1980.
2. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А. Д. Брюно. – М. : Наука, 1979. – 258 с.
3. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях / А. Д. Брюно. – М. : Физматлит, 1998. – 288 с.
4. Козлов В. Н. Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений / В. В. Козлов, С. Д. Фурта. – М. : Ижевск : Ин-т комп. исслед., 2009. – 244 с.
5. Хазин Л. Г. Устойчивость критических положений равновесия / Л. Г. Хазин, Э. Э. Шноль. – Пушкино : ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985. – 215 с.
6. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки / М. Фроммер // УМН. – 1941. – Вып. 9. – С. 212–253.
7. Чеботарев Н. Г. Многочленник Ньютона и его роль в современном развитии математики / Н. Г. Чеботарев // Исак Ньютон. – М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1943. – С. 99–126.
8. Шестаков А. А. Об асимптотическом поведении решений многомерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих особую точку высшего порядка / А. А. Шестаков // ДАН СССР. – 1960. – Т. 131, вып. 5. – С. 1038–1041.
9. Шестаков А. А. Об асимптотическом поведении решений многомерной системы дифференциальных уравнений, имеющей особую точку высшего порядка / А. А. Шестаков // Сиб. мат. журн. – 1961. – Т. 2, № 5. – С. 767–788.
10. Шестаков А. А. Об асимптотическом поведении многомерных систем дифференциальных уравнений / А. А. Шестаков // Уч. зап. – Вып. 7 : Тр. кафедр высш. математики и теорет. механики. – М. : ВЗИИТ, 1961. – С. 3–104.

Поступила 07.10.10.

СУЩЕСТВОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ*

О. В. Дружинина, С. Н. Петрова

Описан геометрический подход к нахождению колебательных режимов, возникающих в динамических системах, описываемых обыкновенными многомерными дифференциальными уравнениями. Установленная теорема о существовании колебательного режима базируется на использовании функций Ляпунова-Немыцкого.

Рассматривается динамическая система, описываемая обыкновенным дифференциальным векторным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = g(x), x \in R^n, \quad (1)$$

где правые части системы (1) определены на некотором тороидном теле и в его окрестности, а также удовлетворяют условиям существования решений и их единственности.

Вопросы существования колебательных режимов различных типов рассматривались в [1–8] и др. В настоящей статье обобщены, уточнены и дополнены результаты В. В. Немыцкого [6–7].

Опишем геометрический подход к нахождению колебательных режимов для случая $n = 3$. Пусть задана некоторая фазовая траектория $q = f(p, t)$ дифференциальной системы (1) для случая $n = 3$.

Будем говорить, что фазовая траектория определяет колебательный режим, если существует ось, вокруг которой происходят колебания, т. е. существует прямая L , по отношению к которой осуществимо следующее геометрическое построение. Пусть C – единичный круг с центром на L , расположенный в ортогональной к L плоскости Π .

Пусть $\bar{q} = f(p, t)$ – некоторая точка траектории; проектируем ее на плоскость круга C , и пусть ее проекция q^* ; тогда проводим радиус-вектор точки q^* и отмечаем на единичном круге точку пересечения этого

радиус-вектора с кругом C , пусть это будет точка r .

Рассмотрим отображение $T\bar{q} = r$. Изменив t , получим $T(f(p, t)) = r(t)$.

Пусть $t \rightarrow \infty$. Функцию $f(p, t)$ назовем соответствующей колебательному режиму, если степень отображения T на круг C стремится к ∞ при $t \rightarrow \infty$, т. е. точка $r(t)$ бесчисленное множество раз обойдет круг при $t \rightarrow \infty$. Для того чтобы аналитически задать колебательный режим, поступим следующим образом.

Пусть дана траектория $q = f(p, t)$ и ось L . Осуществим сначала описанное выше построение для точки p . Выберем в плоскости Π некоторую систему координат, и обозначим угол между радиус-вектором точки p^* и x -осью через φ . Угол φ назовем фазой колебания относительно оси L и выбранной системы координат. Спроектируем теперь точку q^* на y -ось и обозначим проекцию через y^* . Если обозначить расстояние точки q^* от начала координат через r^* , а угол между радиус-вектором точки q^* и направлением φ через α , то имеем

$$y^*(t) = r^*(t) \sin(\alpha(t) + \varphi). \quad (2)$$

Запишем равенство (2) в виде

$$y^*(t) = r^*(t) \sin\left(\frac{\alpha(t)}{t}t + \varphi\right).$$

$$\text{или } y^*(t) = r^*(t) \sin(\omega(t)t + \varphi_P). \quad (3)$$

© О. В. Дружинина, С. Н. Петрова, 2010

* Работа частично поддержана РФФИ (проект № 10-08-00826-а) и Фондом содействия отечественной науке.

В выражении (3) величина $\max r^*(t)$ при $0 \leq t \leq \infty$ есть амплитуда колебания; а выражение $\omega(t) = \frac{\alpha(t)}{t}$ есть переменная частота. Чтобы от переменной частоты перейти к некоторым числовым характеристикам частоты, целесообразно рассматривать $\sup \omega(t)$ – верхнюю правую частоту колебания и $\inf \omega(t)$ – нижнюю правую частоту.

Если рассматривать и отрицательное направление времени, то будем говорить и о верхней левой частоте, и нижней левой частоте. Очевидно, все эти величины не зависят от фазы, но зависят от выбора оси L .

Вместо рассмотрения абсолютной амплитуды $\sup r^*(t)$ целесообразнее рассматривать предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup r(t) = r_0. \quad (4)$$

Для (4) возможны следующие случаи. Если $r_0 = 0$, то колебания назовем затухающими, если $r_0 = \infty$, то будем говорить, что имеем дело со случаем внутреннего резонанса, и наконец, если r_0 конечно и отлично от нуля, то будем говорить, что имеются незатухающие автоколебания, или что $f(p, t)$ есть автоколебательный режим.

Рассмотрим аналитический признак существования колебательных режимов. В [6–8] предложен следующий подход. Пусть дана некоторая ось L и задана связка поверхностей, пересекающихся по L , не имеющих других точек пересечения. Предположим, что эти плоскости заполняют цилиндрическую окрестность оси L . Эту связку поверхностей будем задавать уравнением

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \operatorname{arctg} \frac{F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \varphi, \quad (5)$$

где φ изменяется от 0 до 2π .

Функцию V будем называть функцией Ляпунова–Немыцкого относительно оси L и дифференциальной системы (1), если:

1) семейство (5) состоит из непрерывных поверхностей, проходящих через ось L и более нигде не пересекающихся, и через каждую точку цилиндрической окрестности оси L проходит одна и только одна поверхность семейства;

2) производная функции V в силу системы (1) непрерывна и не обращается в нуль

в окрестности L , за исключением, быть может, самой оси L , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{F_1}{F_2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i} F_2 - \frac{\partial F_2}{\partial x_i} F_1 \right) f_i}{F_1^2 + F_2^2} > \alpha > 0. \end{aligned}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть в некоторой цилиндрической окрестности U оси L существует функция Ляпунова–Немыцкого для дифференциальной системы (1). Тогда в окрестности U существует колебательный режим дифференциальной системы.

Пусть выполнено условие теоремы. Тогда имеем

$$V(t) = V_0 + \int_{t_0}^t \frac{dV(t)}{dt} dt.$$

Следовательно, если вдоль решения $\frac{dV(t)}{dt} > \alpha > 0$, то $V(t) \geq V_0 + \alpha(t - t_0)$, и функция $V(t)$ неограниченно возрастает вдоль решения, т. е. бесчисленное множество раз угловой параметр φ принимает все значения от 0 до 2π . Теорема доказана.

Следует отметить, что если существует функция Ляпунова–Немыцкого, то все режимы, начальные точки которых находятся в окрестности U оси L , будут колебательными. Из этого факта следует, что теорема 1 обратима.

Охарактеризуем затухающие колебания и автоколебания. Для этого рассмотрим вторую функцию Ляпунова–Немыцкого. А именно, рассмотрим цилиндрическую функцию Ляпунова–Немыцкого, т. е. семейство цилиндрических поверхностей с осью, совпадающей с осью L . Пусть уравнение таких поверхностей $W_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$. Если хотя бы на одной из этих поверхностей, расположенных в цилиндрической окрестности U , выполняется неравенство $\frac{dW_1}{dt} > 0$, то затухания колебаний не будет, а если выполняется неравенство $\frac{dW_1}{dt} < 0$, то не будет внутреннего резонанса. Вдоль найденных автоколебаний координаты фазовой точки могут по модулю неограниченно возрастать. Если потребовать, чтобы вдоль фазовой траектории координаты оставались ограниченными, то можно использовать параболическую функцию Ляпунова–Немыцкого $W_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$,

т. е. такую функцию, поверхности уровня которой пересекают ось L в одной точке и гомеоморфны плоскости. Если среди поверхностей уровня $W_2 = C$ найдутся две такие поверхности $W_2 = C_1$ и $W_2 = C_2$, и если выполняются неравенства

$$\left(\frac{dW_2}{dt}\right)_{C_2} < 0 \text{ и } \left(\frac{dW_2}{dt}\right)_{C_1} > 0, C_2 > C_1,$$

то в области действия всех трех функций существуют автоколебания с ограниченными координатами как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Важно отметить, что если доказано существование автоколебаний с помощью трех функций Ляпунова–Немыцкого, то легко показать, что среди построенных колебательных режимов найдется периодический режим.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Афанасьев А. П. Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах / А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба. – М. : Изд-во ЛКИ, 2007. – 240 с.
2. Блиничевский В. С. Существование периодических решений у одной автономной системы n дифференциальных уравнений / В. С. Блиничевский // Мат. сб. – 1960. – Т. 50, № 1. – С. 117–126.
3. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М. : Физматгиз, 1958. – 605 с.
4. Крылов Н. М. Новые методы нелинейной механики в их применении к изучению работы электрических генераторов / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. – М. ; Л. : ОНТИ, 1934. – 244 с.
5. Немыцкий В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1949. – 550 с.
6. Немыцкий В. В. Метод вращающихся функций Ляпунова для разыскания колебательных режимов / В. В. Немыцкий // ДАН СССР. – 1954. – Т. 97, № 1. – С. 33–36.
7. Немыцкий В. В. О некоторых методах качественного исследования «в большом» многомерных автономных систем / В. В. Немыцкий // Труды ММО. – 1956. – Т. 6. – С. 455–482.
8. Немыцкий В. В. Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий // УМН. – 1965. – Т. 20, вып. 4. – С. 3–32.

Поступила 15.10.10.

УСЛОВИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ*

А. Ю. Александров, А. В. Платонов

Исследуются условия равномерной диссипативности и перманентности дискретной модели популяционной динамики. Предполагается, что параметры рассматриваемой системы могут переключаться с одного набора значений на другой. Для подсистем, составляющих гибридную систему, строится общая функция Ляпунова, с помощью которой условия равномерной диссипативности и перманентности сводятся к условиям разрешимости системы линейных матричных неравенств специальной вида. Получены оценки области диссипативности и времени попадания решений в эту область.

1. Введение. Для моделирования динамики биологических сообществ широко используются системы дифференциальных и разностных уравнений [4; 6]. Важной задачей, возникающей при анализе таких моделей, является исследование условий ограниченности их решений.

С практической точки зрения особый интерес представляет ситуация, когда в фазовом пространстве изучаемой системы существует ограниченная область, такая, что каждое решение за конечное время попадает в эту область и остается там при дальнейшем возрастании времени [6]. В этом случае говорят, что решения предельно ограничены, а системы, обладающие указанным свойством, называются диссипативными [2; 11].

Другая актуальная проблема, связанная с анализом моделей, описывающих взаимодействие нескольких видов, – это проблема персистентности [6]. Биологический смысл свойства персистентности заключается в том, что в процессе эволюции виды не вымирают, и, более того, какой бы малой ни была их первоначальная численность, найдется момент времени, начиная с которого численности видов будут превосходить некоторые фиксированные положительные значения.

Системы, обладающие и свойством диссипативности и свойством персистентности, называются перманентными [6].

В настоящей статье исследуется некоторый класс дискретных моделей популяционной динамики. Предполагается, что в процессе эволюции параметры моделей могут переключаться с одних значений на другие. С помощью дискретного аналога прямого метода Ляпунова определяются условия диссипативности и перманентности изучаемых систем.

2. Постановка задачи. Пусть задана система разностных уравнений

$$x_i(k+1) = x_i(k) \exp \left(h \left(c_i^{(\sigma)} + \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(\sigma)} f_j(x_j(k)) \right) \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

описывающая динамику численности и взаимодействия популяций. Здесь $x_i(k)$ – численность (плотность) i -й популяции при k -й итерации, $k = 0, 1, \dots$; функции $f_i(z_i)$ определены при $z_i \in [0, +\infty)$ и обладают рядом специальных свойств; $\sigma = \sigma(k)$ – функция, задающая закон переключения параметров с одного набора значений на другие, $\sigma(k) \in$

© А. Ю. Александров, А. В. Платонов, 2010

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-08-92202ГФЕН_а).

$\in \{1, \dots, N\}$; h — положительное число (шаг дискретизации); $c_i^{(s)}$ и $p_{ij}^{(s)}$ — постоянные величины; $s = 1, \dots, N$; $i, j = 1, \dots, n$.

Система (1) относится к классу так называемых гибридных систем [8–9]. При каждом значении k ее динамика описывается одной из подсистем

$$x_i(k+1) = x_i(k) \exp \left(h \left(c_i^{(s)} + \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(s)} f_j(x_j(k)) \right) \right), \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, N.$$

Модели вида (2) представляют собой дискретные аналоги широко известной непрерывной модели межвидового взаимодействия типа Лотки–Вольтерра [4; 6–7; 10].

Величины $c_i^{(s)}$ определяют скорость естественного прироста популяций; члены $p_{ii}^{(s)} f_i(x_i(k))$, где $p_{ii}^{(s)} < 0$, характеризуют процессы самолимитирования популяций по численности при наличии ограниченных ресурсов; наконец, выражения $p_{ij}^{(s)} f_j(x_j(k))$ при $j \neq i$ задают степень и характер межвидового взаимодействия. Переключения значений параметров в изучаемой модели могут быть вызваны внешними факторами, влияющими на рассматриваемую экосистему, например, сезонными изменениями.

Согласно обычным предположениям [4; 6–7] будем считать, что функции $f_i(z_i)$, $i = 1, \dots, n$ обладают следующими свойствами:

- 1) $f_i(z_i)$ непрерывны при $z_i \in [0, +\infty)$;
- 2) $f_i(0) = 0$ и $f_i(z_i) > 0$ при $z_i > 0$;
- 3) $f_i(z_i) \rightarrow +\infty$ при $z_i \rightarrow +\infty$.

Кроме того, предположим, что:

$$4) \int_0^1 \frac{f_i(\tau)}{\tau} d\tau < +\infty;$$

5) функции $f_i(z_i) = f_i(\exp(z_i))$ удовлетворяют условию Линнича с константой L для всех $z_i \in (-\infty, +\infty)$.

Например, свойствами 1)–5) обладают функции $f_i(z_i) = \ln(z_i + 1)$, $i = 1, \dots, n$.

Цель настоящей работы — определить условия диссипативности и перманентности системы (1). Такие условия хорошо известны для обобщенных моделей Лотки–Вольтерра, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями без переключений [4;

6–7]. В данной статье изучается гибридная разностная система.

Следует отметить, что при решении задач анализа и синтеза систем с переключениями в широком классе случаев требуется, чтобы система имела заданные характеристики при любом законе переключения [8–9]. Это требование обусловлено тем, что закон переключения может быть или неизвестен или слишком сложен для того, чтобы его можно было в явном виде учитывать при исследовании динамики системы.

3. Условия равномерной диссипативности. Введем обозначения. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)^*$; R_+^n — неотрицательный ортант в n -мерном пространстве, а $\text{int } R_+^n$ — множество его внутренних точек; $x(k, x_0, k_0)$ — решение системы (1), выходящее из точки x_0 при $k = k_0$.

Определение 1. Гибридная система (1) называется равномерно диссипативной в R_+^n , если существует такое число $D > 0$, что для любого $Q > 0$ найдется $K = K(Q) \geq 0$, для которого $\|x(k, x_0, k_0)\| \leq D$ при всех $k_0 \geq 0$, $x_0 \in B_Q$, $k \geq k_0 + K$, и при любом законе переключения $\sigma(k)$. Здесь $B_Q = \{x : x \in R_+^n, \|x\| \leq Q\}$.

Основным методом качественного анализа гибридных систем с произвольным режимом переключения правых частей является построение общей функции Ляпунова для соответствующего семейства подсистем [8–9].

Чтобы применить этот метод к системе (1), рассмотрим линейные матричные неравенства

$$P_s^* A + A P_s < 0, \quad s = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где $P_s = (p_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^n$, $s = 1, \dots, N$. Неравенства (3) понимаются как условия отрицательной определенности соответствующих квадратичных форм, а решение ищется в виде диагональной положительно определенной матрицы $A = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Проблема разрешимости таких систем исследовалась во многих работах [1; 3; 5].

Теорема 1. Пусть существует диагональная положительно определенная матрица A , удовлетворяющая неравенствам (3). Тогда можно указать такое значение $h_0 > 0$, что при любом $h \in (0, h_0)$ система (1) будет равномерно диссипативной в R_+^n .

Доказательство. Рассмотрим положительно определенную матрицу $A = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, являющуюся решени-

ем системы (3). Общую функцию Ляпунова для подсистем (2) строим в виде

$$V(z) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_1^{z_i} \frac{f_i(\tau)}{\tau} d\tau,$$

где $z = (z_1, \dots, z_n)^T$

Функция $V(z)$ непрерывна при $z \in R_+^n$ и $V(z) \rightarrow +\infty$ при $\|z\| \rightarrow \infty$. Вычислим ее приращение на решениях i -й подсистемы из семейства (2). При этом очевидно, что достаточно рассматривать лишь решения, принадлежащие $\text{int} R_+^n$. Получим

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(x(k+1)) - V(x(k)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{x_i(k)}^{x_i(k+1)} \frac{f_i(\tau)}{\tau} d\tau = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{y_i(k)}^{y_i(k+1)} \tilde{f}_i(\tau) d\tau = \\ &= h \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{f}_i(y_i(k) + \theta_{ik} \Delta y_i(k)) \left(c_i^{(s)} + \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(s)} \tilde{f}_j(y_j(k)) \right) = \\ &= h \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{f}_i(y_i(k)) \left(c_i^{(s)} + \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(s)} \tilde{f}_j(y_j(k)) \right) + h \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\tilde{f}_i(y_i(k) + \theta_{ik} \Delta y_i(k)) - \tilde{f}_i(y_i(k)) \right) \times \\ &\quad \times \left(c_i^{(s)} + \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(s)} \tilde{f}_j(y_j(k)) \right). \end{aligned}$$

Здесь $y_i(k) = \ln(x_i(k))$, $\Delta y_i(k) = y_i(k+1) - y_i(k)$, $\theta_{ik} \in (0, 1)$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, найдутся такие положительные постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, не зависящие от s , что при всех $k = 0, 1, \dots$, $y(k) \in R^n$ будет выполняться оценка

$$\begin{aligned} \Delta V &\leq -\alpha_1 h \|\tilde{f}(y(k))\|^2 + \alpha_2 h \|\tilde{f}(y(k))\| + \\ &\quad + \alpha_3 L h^2 (1 + \|\tilde{f}(y(k))\|^2). \end{aligned}$$

Выберем $h_0 > 0$ в соответствии с условием

$$h_0 < \frac{\alpha_1}{\alpha_3 L}. \quad (4)$$

Тогда для любого $h \in (0, h_0)$ можно указать такие положительные постоянные b и a_4 , что при всех $k = 0, 1, \dots$, $x(k) \in \text{int} R_+^n$ будет иметь место неравенство

$$\Delta V \leq -a_4 h \|f(x(k))\|^2 + b h. \quad (5)$$

Положим $A = b/a_4$, $M = \max_{\|f(x)\|^2 \leq A} V(x)$, $M_1 = M + b h$. Рассмотрим область

$$G = \{x : V(x) \leq M_1\}. \quad (6)$$

С учетом (5) получаем $V(x(k+1)) \leq M_1$, если $\|f(x(k))\|^2 \leq A$, и $V(x(k+1)) < V(x(k))$, если $\|f(x(k))\|^2 > A$. Значит, если решение $x(k, x_0, k_0)$ системы (1) попадет в область G при некотором $k = k_1 \geq k_0$, то оно будет оставаться в этой области и для всех $k \geq k_1$.

Зададим $Q > 0$. Покажем, что найдется такое $K = K(Q) \geq 0$, что $V(x(k, x_0, k_0)) \leq M_1$ для всех $k_0 \geq 0$, $x_0 \in B_Q$ и $k \geq k_0 + K(Q)$.

Пусть $U = \max_{x \in B_Q} V(x)$. Если $U \leq M_1$, то $K(Q) = 0$.

Предположим теперь, что $U > M_1$. Если $V(x(k, x_0, k_0)) > M_1$ при $k = k_0, k_0 + 1, \dots, \bar{k}$, то для всех этих значений k будут выполнены неравенства

$$M_1 < V(x(\bar{k}, x_0, k_0)) \leq$$

$$\leq V(x_0) - \gamma(\bar{k} - k_0) \leq U - \gamma(\bar{k} - k_0),$$

где

$$\gamma = h a_4 \left(\min_{M_1 \leq V(x) \leq U} \|f(x)\|^2 - A \right).$$

Следовательно, $\bar{k} < k_0 + (U - M_1)/\gamma$. Полагая $K(Q) = (U - M_1)/\gamma$, получим $V(x(k, x_0, k_0)) \leq M_1$ при всех $k \geq k_0 + K(Q)$.

Таким образом, система (1) равномерно диссипативна. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие 5) раздела 2 представляет собой довольно сильное ограничение на функции $f_1(z_1), \dots, f_n(z_n)$. Предположим теперь, что для любого $H > 0$ функции $\tilde{f}_1(z_1), \dots, \tilde{f}_n(z_n)$ удовлетворяют условию Липшица в области B_H с константой $L(H)$, причем $L(H) \rightarrow +\infty$ при $H \rightarrow +\infty$. Тогда из существования решения системы неравенств

(3) в виде диагональной положительно определенной матрицы Λ следует, что для каждого $Q > 0$ число $h_0 > 0$ можно выбрать так, чтобы при любом $h \in (0, h_0)$ и любом законе переключения решения $x(k, x_0, k_0)$ системы (1) с начальными данными $k_0 \geq 0$, $x_0 \in B_Q$ за конечное время попадали в область (6) и оставались там при дальнейшем возрастании времени. Таким образом, свойство предельной ограниченности гарантируется только для решений, начинающихся в заданной области B_Q . Подобная ситуация будет, например, иметь место, если $f_i(z_i) = z_i$, $i = 1, \dots, n$, что соответствует классической модели Лотки-Вольтерра [4; 6].

4. Достаточные условия перманентности. Исследуем теперь условия перманентности гибридной системы (1).

Определение 2. Система (1) называется перманентной, если существует компакт F , содержащийся в $\text{int} R_+^n$, такой, что для любого закона переключения и для любых $k_0 \geq 0$, $x_0 \in \text{int} R_+^n$ решение $x(k, x_0, k_0)$ за конечное время попадает в множество F и далее там остается.

Теорема 2. Предположим, что

$$c_i^{(s)} > 0, \quad p_{ij}^{(s)} \geq 0 \quad (7)$$

при $j \neq i$; $i, j = 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, N$,

и существует диагональная положительно определенная матрица Λ , удовлетворяющая неравенствам (3). Тогда найдется такое значение $h_0 > 0$, что при всех $h \in (0, h_0)$ система (1) будет перманентной.

Доказательство. Пусть положительное число h_0 удовлетворяет неравенству (4). Зафиксируем некоторое $h \in (0, h_0)$ и рассмотрим соответствующую систему (1).

Согласно доказательству теоремы 1, существует $\rho_2 > 0$ такое, что для любого $Q > 0$ числа $K = K(Q)$ и $\rho = \rho(Q)$ можно выбрать

так, чтобы для решений $x(k, x_0, k_0)$ с начальными данными, удовлетворяющими условиям $k_0 \geq 0$, $x_0 \in B_Q$, при $k \geq k_0$ выполнялись неравенства $0 \leq x_i(k, x_0, k_0) \leq \rho$, $i = 1, \dots, n$, а при $k \geq k_0 + K$ — неравенства $0 \leq x_i(k, x_0, k_0) \leq \rho_2$, $i = 1, \dots, n$. Пусть

$$\omega = \min_{i=1, \dots, n; s=1, \dots, N} \min_{0 \leq z_i \leq \rho} \left(c_i^{(s)} + p_{ii}^{(s)} f_i(z_i) \right).$$

Если справедливы соотношения (7), то найдутся числа $\delta > 0$ и $\beta > 0$ такие, что $c_i^{(s)} + p_{ii}^{(s)} f_i(z_i) \geq \beta$ при $0 < z_i \leq \delta$, $i = 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, N$.

Значит, $x_i(k+1) \geq x_i(k) \exp(h\beta)$ при $0 \leq x_i(k) < \delta$, а при $\delta \leq x_i(k) \leq \rho$ имеет место оценка $x_i(k+1) \geq \delta \exp(h\omega)$, $i = 1, \dots, n$.

Зададим число $Q > 0$ и найдем соответствующие ему значения $K(Q)$, $\rho(Q)$ и ω . Рассмотрим решение $x(k, x_0, k_0)$ с начальными данными, удовлетворяющими условиям $k_0 \geq 0$, $\|x_0\| \leq Q$, $x_0 \in \text{int} R_+^n$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ существует $K_i \geq 0$ такое, что $x_i(k_0 + K_i, x_0, k_0) \geq \delta$. Тогда если положить $\tilde{K} = \max\{K(Q), K_1, \dots, K_n\}$, то при $k \geq k_0 + \tilde{K}$ имеем $\rho_1 \leq x_i(k, x_0, k_0) \leq \rho_2$, $i = 1, \dots, n$, где $\rho_1 = \delta \min\{1; \exp(h\omega)\}$. Теорема доказана.

Замечание 2. Несложно заметить, что для любых чисел δ_1 и δ_2 , $0 < \delta_1 < \delta_2$ значение $\tilde{K}$ можно выбрать общим для всех решений, начинающихся при $k_0 \geq 0$ в области $\delta_1 \leq x_i \leq \delta_2$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, перманентность системы (1) будет равномерной относительно начальных данных решений.

Замечание 3. Условия (7) означают, что каждая популяция имеет положительный естественный прирост, и при этом популяции положительно влияют друг на друга, т. е. между ними установлены отношения типа симбиоз, комменсализм или нейтрализм [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А. Ю. Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных систем с переключениями / А. Ю. Александров, А. В. Платонов // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 7. — С. 3–18.
2. Демидович В. П. Лекции по математической теории устойчивости / В. П. Демидович. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
3. Каменецкий В. А. Градиентный метод построения функций Ляпунова в задачах абсолютной устойчивости / В. А. Каменецкий, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 1. — С. 3–12.
4. Пых Ю. А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики / Ю. А. Пых. — М.: Наука, 1983. — 184 с.
5. Boyd S. Linear matrix inequalities in system and control theory / S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. — Philadelphia: SIAM, 1994. — 193 p.

6. Hofbauer J. Evolutionary games and population dynamics / J. Hofbauer, K. Sigmund. – Cambridge : Cambridge University Press, 1998. – 351 p.
7. Kazkurewicz E. Matrix diagonal stability in systems and computation / E. Kazkurewicz, A. Bhaya. – Boston ; Basel ; Berlin : Birkhauser, 1999.
8. Liberzon D. Basic problems in stability and design of switched systems / D. Liberzon, A. S. Morse // IEEE Control Systems Magazine. – 1999. – Vol. 19, No. 5. — P. 59–70.
9. Liberzon D. Switching in systems and control / D. Liberzon. – Boston, MA: Birkhauser, 2003. – 243 p.
10. Radheffer R. Solution of the stability problem for a class of generalized Volterra prey-predator systems / R. Radheffer, W. Walter // Journal of Differential Equations. – 1984. – Vol. 52. – P. 245–263.
11. Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's second method / T. Yoshizawa. – Tokyo : The Math. Soc. of Japan, 1966. – 233 p.

Поступила 26.10.10.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПРИВЛИЖЕНИЯ ОБЛАСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО- РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

У. П. Зараник, А. П. Жабко

В статье рассмотрена нелинейная стационарная система дифференциально-разностных уравнений с одним запаздыванием. Найдено приближение решения дифференциально-разностной системы решением разностной системы урчкненый. На основе полученных оценок построено приближение области асимптотической устойчивости системы с запаздыванием. Предложены способы описания области асимптотической устойчивости дифференциально-разностной системы. Приведен иллюстративный пример. На основе полученных оценок построено приближение области асимптотической устойчивости системы с запаздыванием в функциональном пространстве.

Введение. Для построения области асимптотической устойчивости дифференциально-разностной системы уравнений запаздывающего типа был разработан подход, состоящий из двух этапов. Первый этап заключается в приближении решений дифференциально-разностной системы уравнений решениями разностной системы и оценки близости полученных решений. Вторым этапом состоит из построения области асимптотической устойчивости разностной системы уравнений и описания приближаемой области асимптотической устойчивости дифференциально-разностной системы,

используя оценки приближения соответствующих решений, полученных на первом этапе.

Рассмотрим дифференциально-разностную стационарную систему вида

$$\dot{x} = f(x(t), x(t - T)) \quad (1)$$

с начальной функцией $\varphi(t)$, $t \in [-T; 0]$, где $f(x(t), x(t - T))$ – непрерывная функция своих аргументов. Будем предполагать, что система (1) имеет нулевое решение $f(0, 0) = 0$ и линейное приближение

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + By(t - T)$$

экспоненциально устойчиво по Ляпунову.

© У. П. Зараник, А. П. Жабко, 2010

Схема метода Адамса. Предположим, найдено несколько значений x_j в моменты времени t_j , $x_j = x(t_j)$, $j = \overline{0, i}$, $t_j = t_0 + j\Delta$. Требуется получить правило для вычисления $x_{i+1} \approx x(t_{i+1})$ на следующем шаге.

Интегрируя правую и левую части системы (1) по промежутку $[t_i, t_{i+1}]$, получаем:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x(t), x(t-T)) dt, \quad (2)$$

$$P_k(t) = P_k(t_i + qh) = f_i + q\Delta f_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 f_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 f_{i-3} + \dots + \\ + \frac{q(q+1) \cdot \dots \cdot (q+k-1)}{k!} \Delta^k f_{i-k},$$

а из узла t_{i+1}

$$\tilde{P}_k(t) = \tilde{P}_k(t_{i+1} + qh) = f_{i+1} + q\Delta f_i + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 f_{i-1} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 f_{i-2} + \dots + \\ + \frac{q(q+1) \cdot \dots \cdot (q+k-1)}{k!} \Delta^k f_{i-k-1}.$$

Подставим многочлены $P_k(t)$, $\tilde{P}_k(t)$ в равенство (2). Используя конечные разности, получаем формулы для вычисления очередного значения $x_{i+1} \approx x(t_{i+1})$

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_k(t) dt, \quad (3)$$

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{P}_k(t) dt. \quad (4)$$

На основании формул (3), (4) получаем два семейства многоступенчатых методов Адамса.

Попробуем адаптировать алгоритмы метода Адамса [1] для построения решения дифференциально-разностных уравнений. Заменяя подынтегральную функцию интерполирующим ее многочленом $P_k(t)$, будем считать дискретные приближенные значения $f_j = f(x_j, x_{Tj}) \approx f(x(t_j), x(t_j - T))$ известными. При интерполировании назад из узла t_i имеем

Рассмотрим первое семейство методов (3). Сделаем замену переменных $t = t_i + qh$ в ин-

теграле $\int_{t_i}^{t_{i+1}} P_k(t) dt$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} P_k(t) dt = h \int_0^1 P_k(t_i + qh) dq.$$

Тогда формула (3) может быть переписана в виде

$$x_{i+1} = x_i + hI_k,$$

где

$$I_k = \int_0^1 P_k(t_i + qh) dq = \left[f_i q + \frac{q^2}{2} \Delta f_{i-1} + \left(\frac{q^3}{6} + \frac{q^2}{4} \right) \Delta^2 f_{i-2} + \frac{1}{6} \left(\frac{q^4}{4} + q^3 + q^2 \right) \Delta^3 f_{i-3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{24} \left(\frac{q^5}{5} + \frac{3q^4}{2} + \frac{11q^3}{3} + 3q^2 \right) \Delta^4 f_{i-4} + \dots \right] \Big|_0^1 = \\ = f_i + \frac{\Delta f_{i-1}}{2} + \frac{5\Delta^2 f_{i-2}}{12} + \frac{1}{6} \Delta^3 f_{i-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 f_{i-4} + \dots$$

Ограничиваясь методом Адамса четвертого порядка, получаем

$$x_{i+1} = x_i + h \left(f_i + \frac{1}{2} \Delta f_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 f_{i-2} + \frac{1}{6} \Delta^3 f_{i-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 f_{i-4} \right). \quad (5)$$

Сделаем аналогичную замену в (4) получаем равенство $x_{i+1} = x_i + h\bar{I}_k$, где $t = t_{i+1} + qh$ и, подставляя выражение $\tilde{P}_k(t)$,

$$\begin{aligned} \bar{I}_k = \int_{-1}^0 \tilde{P}_k(t_{i+1} + qh) dq = & \left[f_{i+1}q + \frac{q^3}{2} \Delta f_i + \left(\frac{q^3}{6} + \frac{q^2}{4} \right) \Delta^2 f_{i-1} + \frac{1}{6} \left(\frac{q^4}{4} + q^3 + q^2 \right) \times \right. \\ & \times \Delta^3 f_{i-2} + \frac{1}{24} \left(\frac{q^5}{5} + \frac{3q^4}{2} + \frac{11q^3}{3} + 3q^2 \right) \Delta^4 f_{i-3} + \dots \left. \right] \Big|_{-1}^0 = f_{i+1} - \frac{\Delta f_i}{2} - \frac{\Delta^2 f_{i-1}}{12} - \\ & - \frac{1}{24} \Delta^3 f_{i-2} - \frac{19}{720} \Delta^4 f_{i-3} + \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_{i+1} = x_i + h \left(f_{i+1} - \frac{1}{2} \Delta f_i - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{i-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 f_{i-2} - \frac{19}{720} \Delta^4 f_{i-3} \right). \quad (6)$$

Можно заметить, что первое семейство методов (5) является явным, а второе (6) – неявным.

Основные утверждения и свойства области асимптотической устойчивости.

Предположим, что правые части уравнений $k+1$ раз непрерывно дифференцируемые функции. Тогда ошибка на шаге составляет

$$R_k(x) = \frac{f^{k+1}(\xi, x(\xi))}{(k+1)!} q(q+1) \times \dots \times (q+k) h^{k+1}$$

Таким образом, локальная погрешность метода, вычисляемая по формуле $h \int_0^1 R_k(x_i + qh) dq$, составляет величину порядка $O(h^{k+2})$, а глобальная – $O(h^{k+1})$. Величина погрешности для второго метода

$$\tilde{R}_k(x) = \frac{f^{k+1}(\xi, x(\xi))}{(k+1)!} q(q+1) \times \dots \times (q+k) h^{k+1}$$

Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Утверждения. Локальная погрешность (5), (6) методов Адамса составляет $O(h^{k+2})$ и $O(h^k)$ соответственно.

Рассмотрим семейство разностных уравнений

$$y(t+h) = y(t) + F^h(y(t), y(t-h), \dots, y(t-H)). \quad (7)$$

Линейное приближение системы (7) экспоненциально устойчиво, т. е. справедливо предельное соотношение

$$y_h(t, \varphi) \rightarrow x(t, \varphi) \text{ при } h \rightarrow 0, t \in [0; T],$$

где $y_h(t, \varphi)$ – решение системы (7) при $t \geq 0$.

Лемма 1. Для любого $0 < h < h_0$ существует h_0 такое, что линейное приближение системы (7) является экспоненциально устойчивым по Ляпунову.

Далее будем предполагать, что $x(t, \varphi)$ – решение дифференциально-разностного уравнения с начальной функцией $\varphi(t_0 + \cdot)$ и $y(t)$ – решение разностного уравнения.

Рассмотрим приближение области асимптотической устойчивости разностного A_ε и дифференциально-разностного уравнения

$$\tilde{A}_\varepsilon = \left\{ x : x \in \{R \setminus U_\varepsilon(C\tilde{A}) \cap \|x\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

В область асимптотической устойчивости разностного уравнения A_ε входят кусочно-непрерывные функции с ограниченной первой производной $\|\dot{\varphi}(t)\| \leq S > 0$, для которых выполнено условие $y(t_k) = \varphi(t_k)$, где $t_k \in [-T; 0)$ – точки разбиения отрезка $[-T; 0)$.

Лемма 2. Пусть $\varphi(t) \in \tilde{A}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ такое, что $\tilde{A}_\varepsilon \neq \emptyset$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует h_1 и $R \geq 0$ такое, что справедливо неравенство

$$\|y_h(R, \varphi)\|_\tau < \delta, \quad 0 < h < h_1.$$

Доказательство. $\exists R : \|x(t, \varphi)\| \leq \frac{\delta}{2}$ при $t \geq R$. Тогда $\|y_h(R, \varphi)\| \leq \|y_h(R, \varphi) - x(R, \varphi)\| + \|x(R, \varphi)\| \leq Kh^k + 2\frac{R}{h} + \|x(R, \varphi)\|$.

Если $Kh^k + 2\frac{R}{h} \leq \frac{1}{2}\delta$, то $\|y_h(R, \varphi)\| \leq \delta$.

Теорема. $\forall \varepsilon > 0, \exists h_2 > 0$ такое, что $0 < h < h_2$ справедливо включение,

$$\tilde{A}_\varepsilon \subset A^h$$

Доказательство. $\forall 0 < h < h_0$ система (3) экспоненциально устойчива, следовательно $\exists p > 0$ такое, что

$$\{\varphi : \|\varphi\| < p\} \subset A^h$$

По лемме 2 $\delta = p$, $h_2 = \min\{h_0, h_1\}$, следовательно $\|y_h(R, \varphi)\|_T < p$ при $y_h(R, \varphi) \in A^h$.

Рассмотрим свойства области асимптотической устойчивости дифференциально-разностного уравнения $\tilde{A}$:

1. Положительная инвариантность. $\forall \varphi \in \tilde{A} \Rightarrow x(t, \varphi)$ определено при $t \geq 0$ и $x(t, \varphi) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

2. $\tilde{A}$ – открытое множество.

3. $\tilde{A}$ – связное множество $\forall \tilde{\varphi}$ и $\bar{\varphi} \in \tilde{A} \Rightarrow \exists \varphi_\lambda(t) \in C([-T; 0])$ при $\lambda \in [0; 1]$ такая, что $\varphi_\lambda(t) \in \tilde{A}$ при $\lambda \in [0; 1]$, $\varphi_0(t) = \tilde{\varphi}(t)$ и $\varphi_1(t) = \bar{\varphi}(t)$.

Методы описания области асимптотической устойчивости дифференциально-разностных систем.

Так как область асимптотической устойчивости содержится в некотором функциональном пространстве, то возникает проблема ее описания в этом пространстве. Предложим некоторые способы описания области асимптотической устойчивости:

1. Сечение области асимптотической устойчивости при $t = 0$.

2. Сечение области асимптотической устойчивости при $t = -T$.

3. Огибающая области асимптотической устойчивости:

$$\{(y_1, y_2, \dots, y_n) \mid y_s = \max_{t \in [-T; 0]} |\varphi_s(t)|, s = \overline{1, n}\}.$$

4. Пространство среднеквадратичных значений $\{(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_n) \mid \bar{\varphi}_s = \int_{-T}^0 \varphi_s^2(t) dt\}$.

5. Эмиттанс $\rho(t, x_1, \dots, x_n) = \int_D d\mu$, где

$$D = \varphi \in \tilde{A}, \varphi_s(t) = x_s, s = \overline{1, n}.$$

Пример. Рассмотрим реактор, состоящий из двух активных зон [2]. Будем считать, что реактивность в 1-й и 2-й активных зонах реактора зависит только от уровня мощности

в этой зоне. Уравнения динамики имеют следующий вид

$$l \frac{dx_1}{dt} = -\nu x_1(t)[1 + x_1(t)] - \alpha x_1(t) + \alpha x_2(t - T), \quad (8)$$

$$l \frac{dx_2}{dt} = -\nu x_2(t)[1 + x_2(t)] - \alpha x_2(t) + \alpha x_1(t - T),$$

где l – время жизни нейтронов; α – коэффициент, характеризующий связь между 1-й и 2-й активной зонами; $\nu = \chi N$, где χ – величина отрицательного мощностного коэффициента реактивности; N – мощность; T – время запаздывания ($\nu > 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $T > 0$). Исследуем данную систему уравнений на устойчивость двумя различными способами.

Первый способ заключается в аналитическом исследовании корней квазиполинома линейной части рассматриваемой системы, который имеет вид:

$$(l\lambda + \alpha + \nu)^2 = \alpha^2 e^{i\lambda T}$$

Получаем следующий результат: при $\alpha > 0$ имеем абсолютную устойчивость, при $\alpha \leq 0$ устойчивость для $T \in [0, \hat{T})$, где

$$\hat{T} = \frac{l(-2\varphi + 2\pi)}{2\sqrt{-\nu(\nu + 2\alpha)}};$$

где $\varphi = \arctan \left(\frac{\sqrt{-\nu(\nu + 2\alpha)}}{\alpha + \nu} \right)$ и $\alpha \leq -\frac{1}{2}\nu$.

Второй способ заключается в построении области асимптотической устойчивости системы с запаздыванием с помощью вышеизложенного метода Адамса в среде MATLAB. Построение графиков и их анализ подтверждают существование зависимости области асимптотической устойчивости от параметров системы.

Построение графиков и их анализ показывают, что существует зависимость области асимптотической устойчивости от параметров системы T, α, ν, l . Так на рис. 1 продемонстрирована зависимость $\alpha - \nu$.

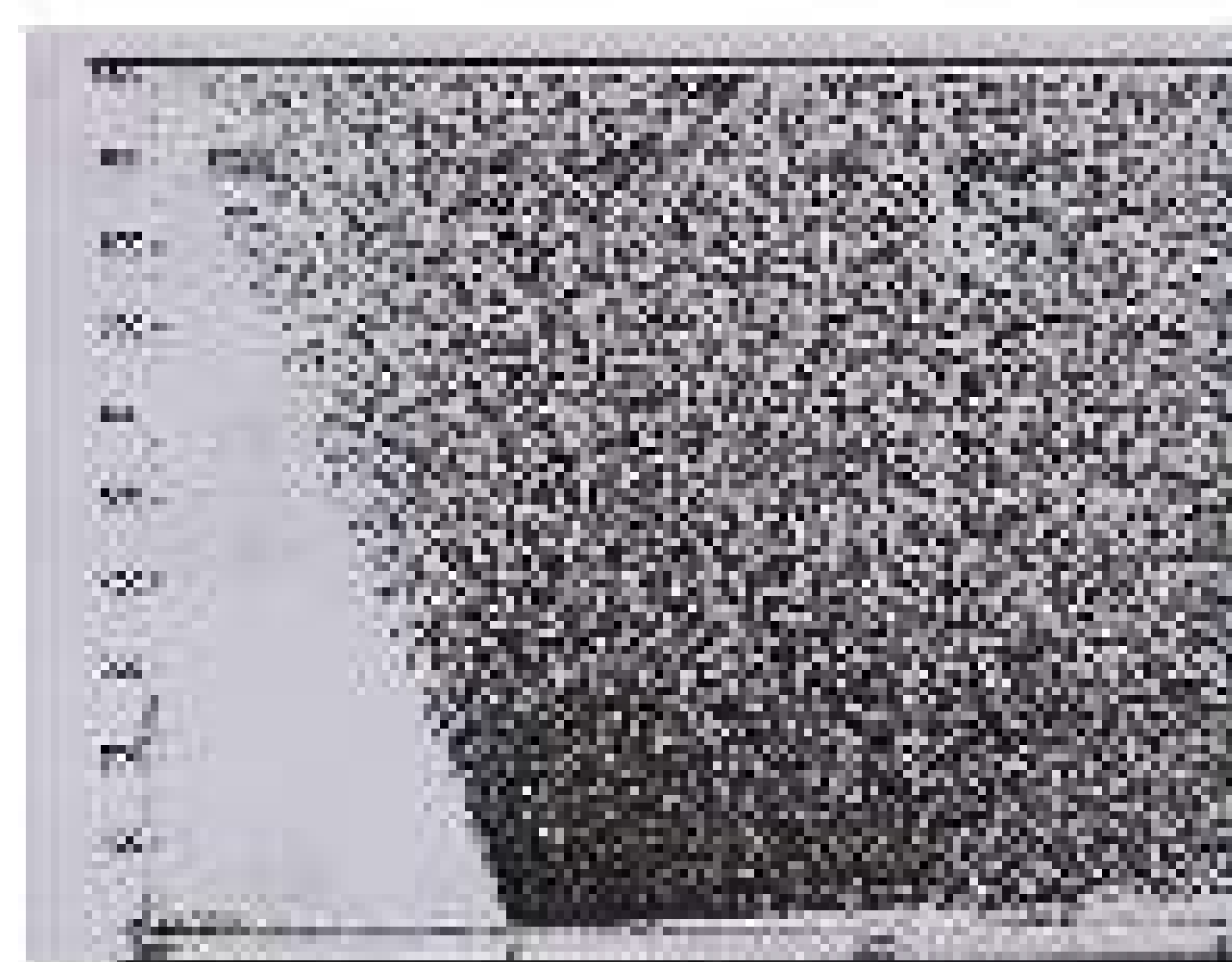


Рис. 1. Зависимость параметров системы $\alpha - -\nu$

Результаты первого и второго способа согласуются между собой и уточняют данные, полученные в [2], где показано, что область асимптотической устойчивости имеет следующий вид:

$$\sqrt{x_1(0)^2 + x_2(0)^2} < \sqrt{2},$$

который не зависит от параметров системы.

На рис. 2. изображено сечение области асимптотической устойчивости системы (8), где множество В – проекция области асимптотической устойчивости дифференциально-разностного уравнения без ограничения на производную и множество С – проекция области асимптотической устойчивости дифференциально-разностного уравнения с ограничением на производную: $\|\dot{\varphi}(t)\| = 1$.

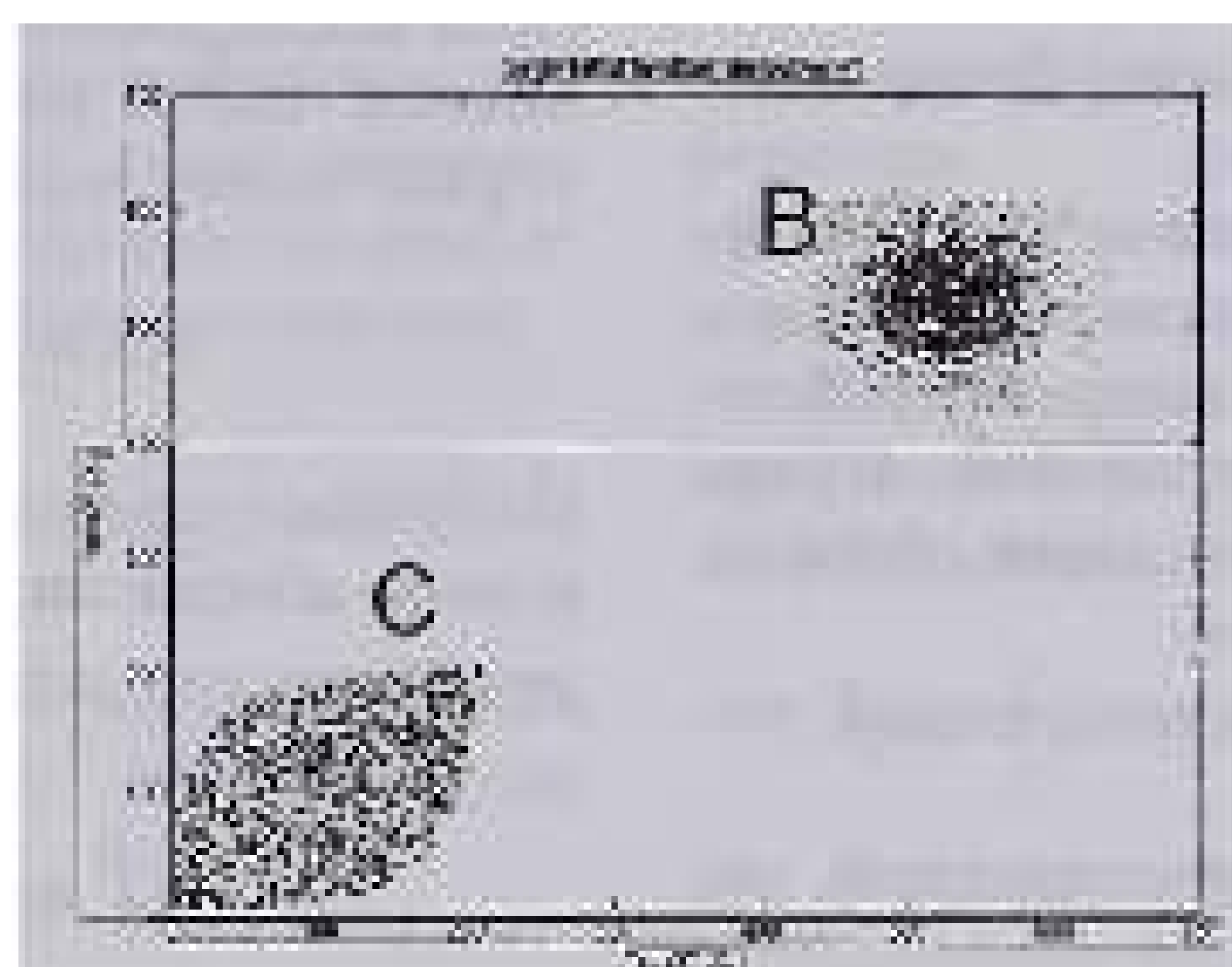


Рис. 2. Сечение области асимптотической устойчивости при $t = -T$

На рис. 3 представлена огибающая области асимптотической устойчивости, по осям $X_1(-T)$, $X_2(-T)$ – координаты

начальной функции $\varphi(t)$ в точке $t = -T$. Множества точек В и С определяются также $\varphi(t)$.

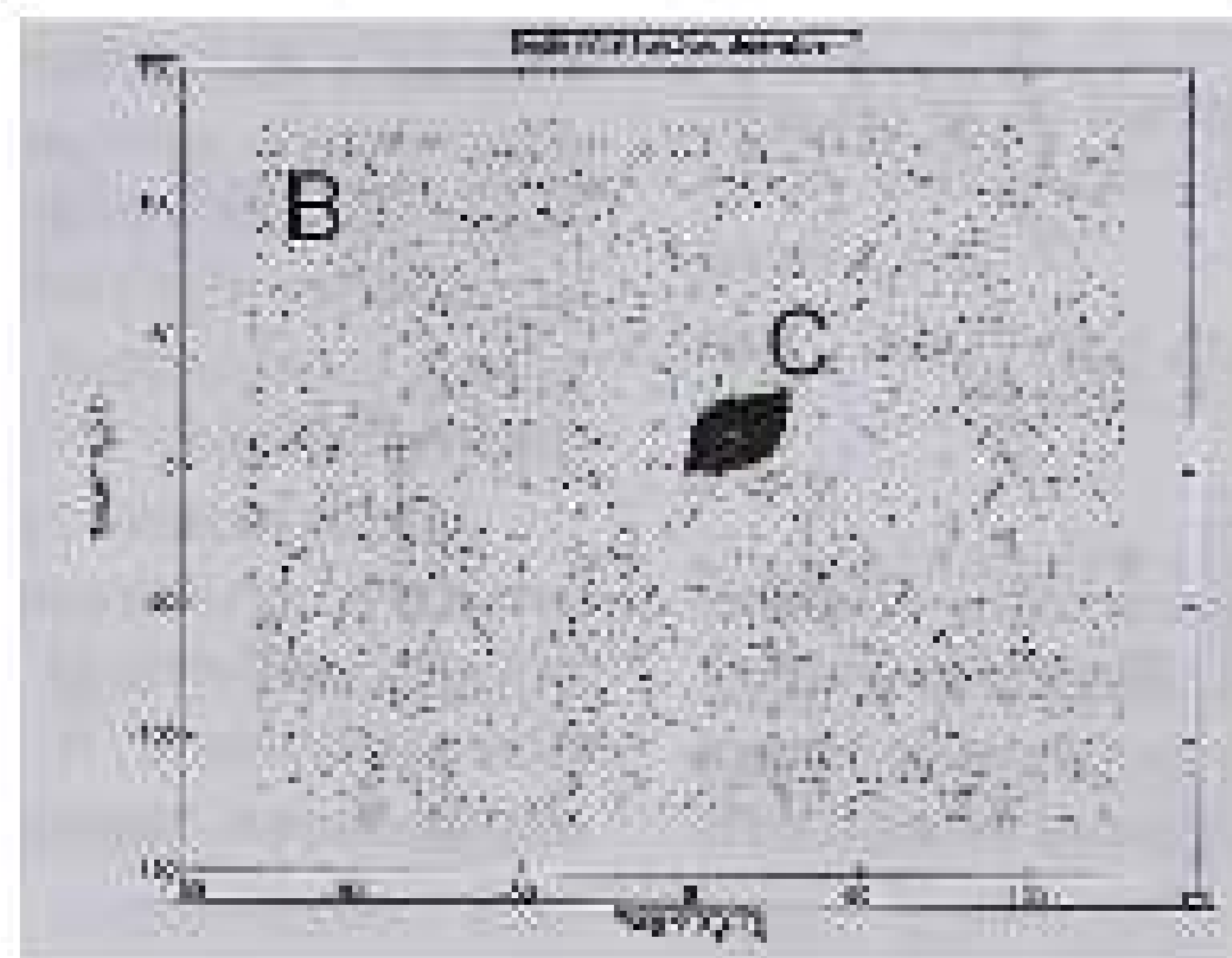


Рис. 3. Огибающая области асимптотической устойчивости

На рис. 4 изображен эмиттанс, который показывает распределение плотности точек на поверхности области асимптотической

устойчивости. Чем светлее поверхность, тем больше плотность точек, которые принадлежат области асимптотической устойчивости.

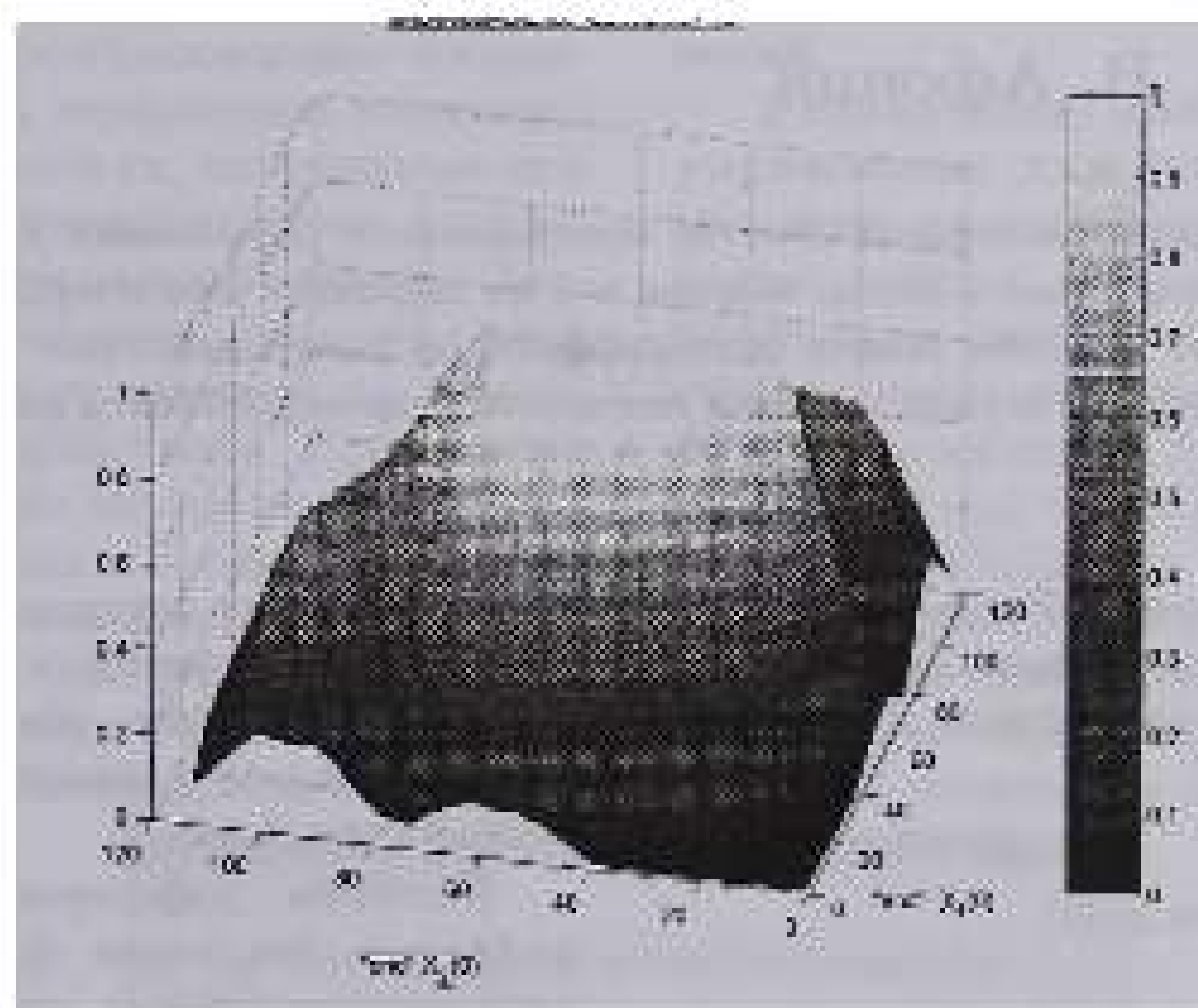


Рис. 3. Эмиттанс

Второй способ построения области асимптотической устойчивости был реализован в среде MATLAB. Таким образом, подтвердился результат, полученный при аналитическом исследовании квадрупольной системы. Приведенные способы

описания области асимптотической устойчивости дифференциально-разностных систем в функциональном пространстве дают более полную картину для исследования системы дифференциально-разностных уравнений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. - М. : Наука, 1987. - 600 с.
2. Горяченко В. Д. Методы теории устойчивости в динамике ядерных реакторов / В. Д. Горяченко. - М. : Атомиздат, 1971. - 264 с.

Поступило 28.10.10.

ВЫВОД НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НА ЗАДАННОЕ ДВИЖЕНИЕ

В. В. Афонин

Работа посвящена синтезу программного управления для нелинейного объекта управления с целью вывода его на заданную траекторию. В основе синтеза лежит решение задачи оптимального по быстродействию управления, с помощью которого осуществляется поэтапный перевод объекта на заданное движение.

Постановка задачи. Рассматривается объект управления, который описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -x_1(t)x_2(t) + x_3(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= -0,1x_3(t) - \\ &- x_2(t)x_3(t)\operatorname{sign}(x_3(t)) + u(t),\end{aligned}\quad (1)$$

где $x_i(t)$ – переменные состояния объекта, $i = 1, 2, 3$; $|u(t)| \leq 1$ – управляющее воздействие; $y(t) = x_1(t)$ – управляемая переменная, выход объекта. Требуется перевести выход объекта из начального нулевого состояния на заданную траекторию, которая описывается следующей линейной функцией времени:

$$z(t) = 0,014t + 0,62. \quad (2)$$

Решению задачи перевода нелинейного объекта на заданную траекторию посвящено достаточно много работ [3], где также рассматриваются некоторые методы синтеза нелинейных систем управления с полиномиальными нелинейностями. В данной работе приводятся результаты расчета программного управления для частной задачи быстродействия с последующим многократным применением этого управления. Показано, что с некоторой приведенной погрешностью можно осуществить перевод объекта на заданную траекторию (2) объекта управления (1).

Описание алгоритма синтеза программного управления. Во-первых, следу-

ет иметь в виду ограничения, накладываемые на модели нелинейных объектов управления. Они описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Решения дифференциальных уравнений являются гладкими функциями. В систему дифференциальных уравнений управляющее воздействие входит линейно и имеет симметричное ограничение на свою величину, т. е. когда $|u(t)| \leq U_m$, где U_m – максимально допустимая величина. Для подобных объектов в задаче быстродействия оптимальное управление носит релейный характер с интервалами управления не более n , где n – порядок объекта (количество дифференциальных уравнений) [2].

Предлагается решать нелинейную задачу быстродействия для крайних условий, когда правая граница по управляемой координате является достаточно малой. В частности, для приведенного примера крайние условия имеют вид: $X(0) = [0; 0; 0]$ – левая граница, $X(t_k) = [x_{1k}; 0; 0]$ – правая граница, где t_k – минимальное время перехода в состояние $X(t_k)$; $x_{1k} > 0$.

Расчет моментов переключения релейного управления был выполнен на основе численного алгоритма, приведенного в [1]. В отличие от других алгоритмов, решающих нелинейную задачу быстродействия, в нем не требуется задания начального приближения по определению моментов переключения. Он численно, программным путем определяет условия «сшивки» траекторий с последующим расчетом временных отрезков, где это происходит.

Когда определены моменты переключения $t_1, t_2, t_3 = t_k$, то программное управление

© В. В. Афонин, 2010

с моментами переключения t_1, t_2, t_3 многократно используется для систем уравнений (1), с учетом того, что происходит накопление временных отрезков, на каждом из которых управляющее воздействие определяется с линейным преобразованием координат по оси времени, а переменные состояния имеют начальные значения, полученные при интегрировании дифференциальных уравнений на предыдущем временном отрезке. Подбор моментов переключения осуществляется за счет правой начальной границы x_{1k} и величины допустимого управления. Процесс подобного моделирования не представляет особых проблем в такой высокоразвитой системе математических и инженерных расчетов, как MATLAB. Именно в ней реализованы рассматриваемые алгоритмы. Их можно практически полностью автоматизировать.

Естественно ожидать, что численные расчеты влекут за собой погрешности, которые будут накапливаться при многократном использовании управляющего воздействия для заданной системы дифференциальных уравнений.

Результаты синтеза программного управления для перевода нелинейного объекта на заданную траекторию. Приведем условия, для которых были получены результаты синтеза программного управления, переводящего выход объекта (1) на заданную траекторию (2): $(0) = [0; 0; 0]$ – левая граница, $X(t_k) = [0,2; 0; 0]$ – правая граница, $U_m = 1, t_1 = 0,52, t_2 = 1,44, t_3 = 1,85$. Результат многократного приложения управляющего воздействия с предварительно рассчитанными моментами переключения к системе (1) показан на рис. 1.

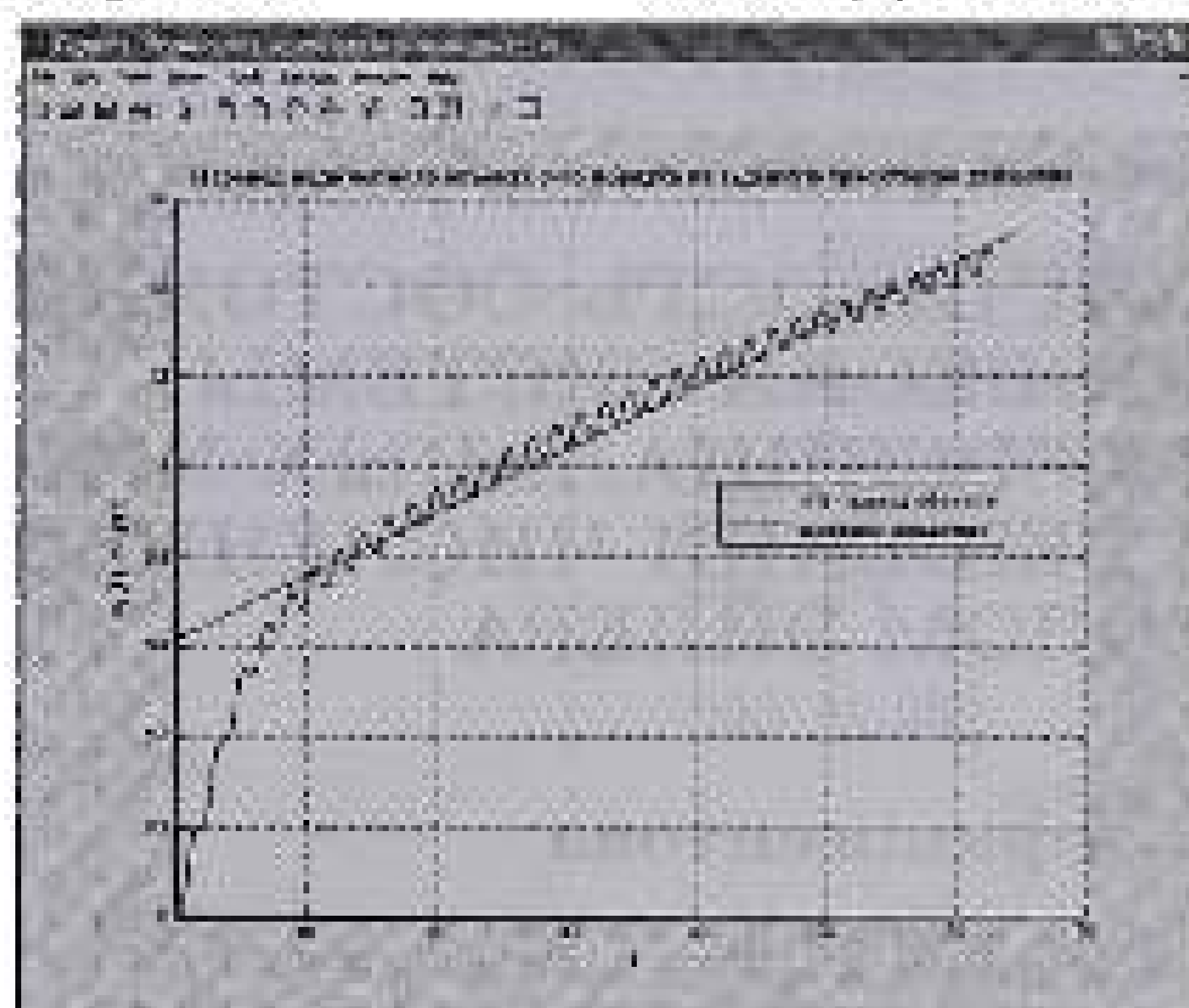


Рис. 1. Пример выхода нелинейного объекта на заданное движение

Как видно из рис. 1, в достаточно большой области движение нелинейного объекта осуществляется вдоль заданной траектории. Оценка отклонений движения нелинейного объекта от заданного движения дается

с помощью приведенной погрешности, которая выражается в процентах от максимального значения для линейной функции (2). Характер изменения приведенной погрешности показан на рис. 2.

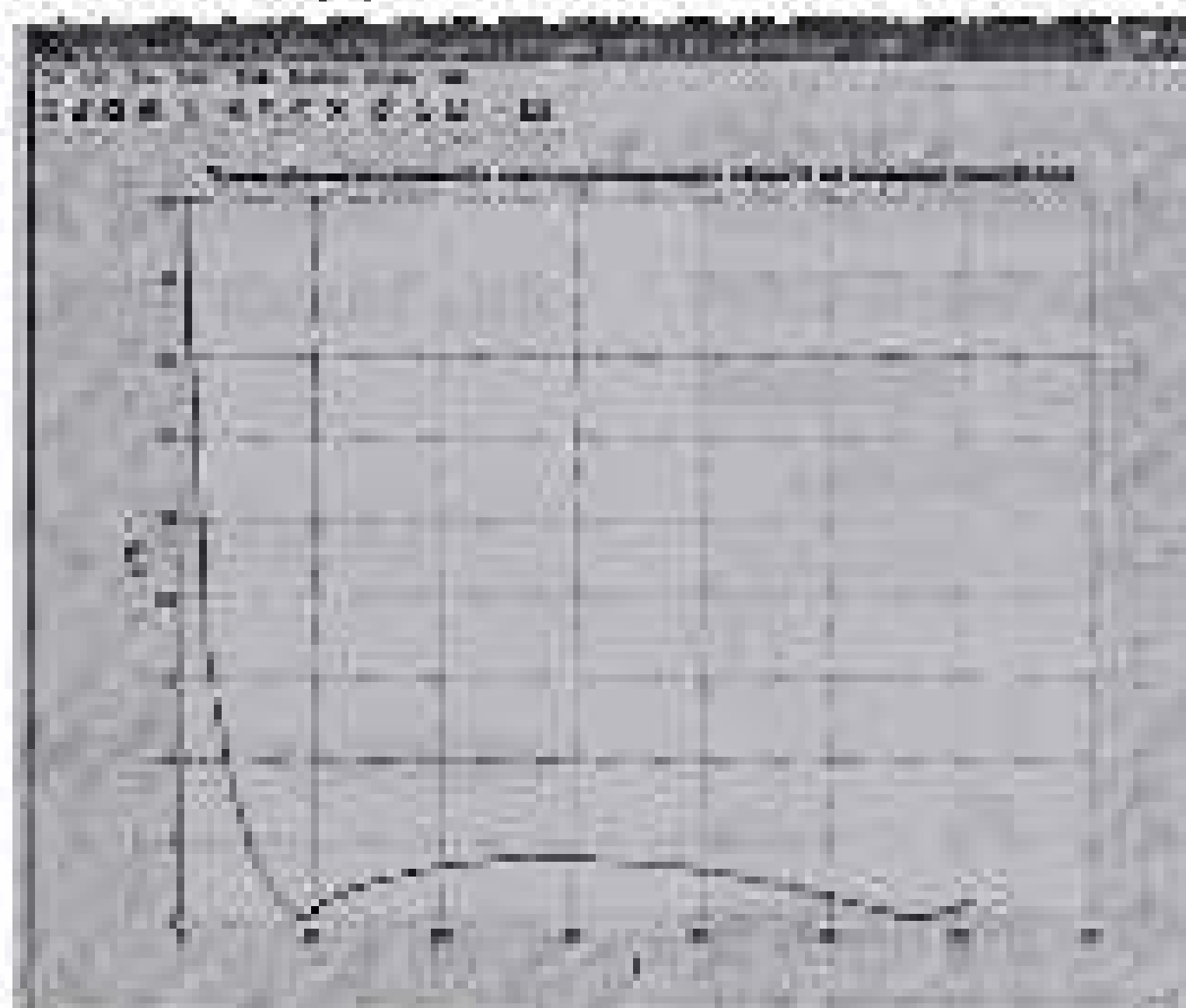


Рис. 2. Оценка погрешности выхода объекта на заданную траекторию

Как видно из рис. 2, погрешность не превосходит 5 % (обычное инженерное требование) на достаточно большом временном отрезке. Таким образом,

оптимальное по быстродействию управление может быть использовано в задаче вывода нелинейного объекта на заданную траекторию.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зотов Н. С. Многоуровневый численный алгоритм расчета оптимальных по быстродействию нелинейных систем / Н. С. Зотов // Изв. СПбГУ. – 1985. – Вып. 482. – С. 47–62.
2. Олейников В. А. Оптимальное управление технологическими процессами в нефтяной и газовой промышленности / В. А. Олейников. – Л. : Недра, 1982. – 216 с.
3. Синтез структурно-сложных нелинейных систем управления : Системы с полиномиальными нелинейностями / С. Е. Душин, А. В. Красов, Н. Н. Кузьмин, В. Б. Яковлев ; под ред. С. Е. Душина. – СПб. : Изд-во СПбГУ «ЛЭТИ», 2004. – 372 с.

Поступила 26.10.10.

УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

Е. В. Афиногентова

В статье получены достаточные условия сохранения устойчивого фокуса системы дифференциальных уравнений при дискретизации методом Эйлера на границе области устойчивости.

Вопрос сохранения типа положения равновесия непрерывной системы при замене ее разностной схемой изучался в работе [1]. Ниже предложен способ решения подобной задачи, основанный на теории критического случая для систем конечно-разностных уравнений. Рассмотрим систему второго порядка

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2)'$, $F = (F_1, F_2)'$, F_1, F_2 – аналитические, достаточно гладкие функции, разлагаются в ряды, начиная с членов не ниже второго порядка; A – постоянная матрица соответствующей размерности. Пусть поло-

жение равновесия системы $(0, 0)$ – устойчивый фокус, т. е. собственные значения матрицы A равны $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$, $\alpha < 0$, $\beta \neq 0$.

Замею $x = Sq$, где S – неособая матрица, такая, что

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

систему (1) приведем к виду

$$\dot{q} = Jq + G(q), \quad (2)$$

где $q = (u, v)'$, $G = (G_1, G_2)'$

Ниже дана разностная схема Эйлера для

© Е. В. Афиногентова, 2010

уравнения (2)

$$\mathbf{q}(n+1) = (\mathbf{E} + h\mathbf{I})\mathbf{q}(n) + h\mathbf{G}(\mathbf{q}(n)), \quad (3)$$

$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Здесь h — шаг дискретизации, $\mathbf{q}(0) = \mathbf{x}(0)$. Собственные числа матрицы линейного приближения равны $\xi_{1,2} = (1 + h\alpha) \pm ih\beta = \gamma e^{\pm i\varphi}$, где $\gamma = \sqrt{(1 + h\alpha)^2 + h^2\beta^2}$, $\cos\varphi = \frac{1 + h\alpha}{\gamma}$, $\sin\varphi = \frac{h\beta}{\gamma}$.

Рассмотрим случай, когда модули собственных значений матрицы линейного приближения системы (3) равны единице, т. е. шаг дискретизации $h = -\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$. Систему (3) запишем в координатной форме

$$\begin{aligned} u(n+1) &= u(n) \cos\varphi - v(n) \sin\varphi + \\ &+ hG_1(u(n), v(n)), \\ v(n+1) &= u(n) \sin\varphi + v(n) \cos\varphi + \\ &+ hG_2(u(n), v(n)). \end{aligned} \quad (4)$$

Сделаем замену по формулам

$$u = \frac{y+z}{2}, \quad v = -\frac{i(y-z)}{2}. \quad (5)$$

получим

$$y(n+1) = e^{i\varphi} y(n) + h \sum_{j=2}^{\infty} P_j(y(n), z(n)), \quad (6)$$

$$z(n+1) = e^{-i\varphi} z(n) + h \sum_{j=2}^{\infty} Q_j(y(n), z(n)),$$

где $P_j(y, z) = \sum_{p=0}^j a_{jp} y^{j-p} z^p$, $Q_j(y, z) = \sum_{p=0}^j \bar{a}_{jp} y^p z^{j-p}$, a_{jp} , $\bar{a}_{jp}$ — комплексно сопряженные коэффициенты.

Пусть наименьшая степень функций P_j , Q_j является нечетным числом λ . В противном случае заменой переменных при выполнении определенных условий эту степень можно исключить [2]. Система (6) будет

иметь вид

$$\begin{aligned} y(n+1) &= e^{i\varphi} y(n) + \\ &+ h \sum_{p=0}^{\lambda} a_{\lambda p} y^{\lambda-p}(n) z^p(n) + \dots, \\ z(n+1) &= e^{-i\varphi} z(n) + \\ &+ h \sum_{p=0}^{\lambda} \bar{a}_{\lambda p} y^p(n) z^{\lambda-p}(n) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Исследуем на устойчивость нулевое решение системы (7). Преобразуем ее с помощью новых переменных $y = \rho e^{i\theta}$, $z = \rho e^{-i\theta}$ к виду

$$\begin{aligned} \rho^2(n+1) &= \rho^2(n) + 2h \sum_{p=0}^{\lambda} \rho^{s+1} [\operatorname{Re}(a_{\lambda p}) \times \\ &\times \cos((2p+1-s)\theta(n) + \varphi) + \operatorname{Im}(a_{\lambda p}) \times \\ &\times \sin((2p+1-s)\theta(n) + \varphi)] + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначения $\operatorname{Re}(\cdot)$, $\operatorname{Im}(\cdot)$ соответствуют действительной и мнимой части комплексного числа. В достаточно малой окрестности нуля для первой разности функции $V = \rho^2$ на решениях уравнения (8) выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \Delta V &\leq 2h \left[\sum_{p=0, p \neq \frac{s-1}{2}}^{\lambda} (|\operatorname{Re}(a_{\lambda p})| + |\operatorname{Im}(a_{\lambda p})|) + \right. \\ &+ \operatorname{Re}(a_{\lambda, (s-1)/2}) \cos\varphi + \operatorname{Im}(a_{\lambda, (s-1)/2}) \sin\varphi \left. \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, если

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(a_{\lambda, (s-1)/2}) \cos\varphi + \operatorname{Im}(a_{\lambda, (s-1)/2}) \sin\varphi &< \\ &< - \sum_{p=0, p \neq \frac{s-1}{2}}^{\lambda} (|\operatorname{Re}(a_{\lambda p})| + |\operatorname{Im}(a_{\lambda p})|), \end{aligned} \quad (9)$$

то нулевое решение системы (7) асимптотически устойчиво, а положение равновесия системы (3) является устойчивым фокусом.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y - 0,56x^3 - 0,6xy^2 + \\ &+ 0,88x^2y + 0,16y^3, \\ \dot{y} &= 4x - 3y - 0,08x^3 + 0,2xy^2 - \\ &- 0,16x^2y - 0,12y^3 \end{aligned}$$

Собственные значения матрицы линейного приближения — $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Следовательно, начало координат – устойчивый фокус. Используя преобразование $x = 2u + v$, $y = u + 3v$, получим

$$\dot{u} = -u - 2v - 2u^3 - 2uv^2 + u^2v + v^3,$$

$$\dot{v} = 2u - v - u^3 - uv^2 - 2u^2v - 2v^3.$$

Перейдем к разностной схеме Эйлера

$$u(n+1) = (1-h)u(n) - 2hv(n) + h(-2u^3(n) -$$

$$- 2u(n)v^2(n) + u^2(n)v(n) + v^3(n)),$$

$$v(n+1) = 2hu(n) + (1-h)v(n) + h(-u^3(n) -$$

$$- u(n)v^2(n) - 2u^2(n)v(n) - 2v^3(n)).$$

Собственные значения матрицы линейного приближения равны $\xi_{1,2} = (1-h) \pm i2h$.

Исследуем на устойчивость нулевое решение на границе области устойчивости, т. е. при $h = 2/5$. Осуществив замену по формулам $u = (u_1 + v_1)/2$, $v = -i(u_1 - v_1)/2$, получим

$$u_1(n+1) = e^{i\varphi}u_1(n) + h(-2-i)u_1^2(n)v_1(n),$$

$$v_1(n+1) = e^{-i\varphi}v_1(n) + h(-2+i)u_1(n)v_1^2(n).$$

Здесь $\alpha_{31} = -2 - i$, $\cos\varphi \operatorname{Re}(\alpha_{31}) + \sin\varphi \times \times \operatorname{Im}(\alpha_{31}) = -2\cos\varphi - \sin\varphi$, $\varphi = \arg(3/5 + i4/5)$ т. е. $\cos\varphi = 3/5$, $\sin\varphi = 4/5$ и неравенство (9) выполняется. Значит, положение равновесия исходной системы дифференциальных уравнений сохраняет свой тип при решении методом Эйлера.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фишман Л. Э. О сохранении состояний радиосема и их устойчивости при замене непрерывной системы дискретной, построенной по методу Рунге-Кутты / Л. Э. Фишман // Мат. заметки. – 1995. – Т. 59, № 5. – С. 784–787.
2. Cristian Mira. Sur un cas critique d'une recurrence ou transformati punctuelle non lineaire / Cristian Mira // Zagadnienia dynamii nieliniowej. – 1973. – № 14. – P. 205–224.

Поступила 15.10.10.

РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. В. Козлов, В. Н. Щенников

В данной статье рассматривается один вид систем дифференциальных уравнений, сингулярно возмущенных по части переменных. Найдены достаточные условия для равномерной ограниченности решений данных систем.

1. Основные определения и теоремы, связанные с равномерной ограниченностью решений систем дифференциальных уравнений, дадим в соответствии с [2].

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(t, x), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $F(t, x)$ – заданное векторное поле, определенное и непрерывное в пространстве R^{n+1} .

Определение. Решения системы (1) называются равномерно ограниченными, если для любого $\alpha > 0$ существует такое $\beta = \beta(\alpha) > 0$, что $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ при $\|x_0\| < \alpha$, $t \geq t_0$.

Для свойств функций Ляпунова $V(t, x)$ введем несколько обозначений. Будем говорить, что функция $V(t, x)$ обладает свойством A , если существует положительная непрерывная возрастающая функция $\alpha(r)$, такая, что

© М. В. Козлов, В. Н. Щенников, 2010

$V(t, x) \leq \alpha(\|x\|)$. Также скажем, что функция $V(t, x)$ обладает свойством В, если существует неотрицательная непрерывная возрастающая функция $b(r)$, такая, что $b(\|x\|) \leq V(t, x)$.

Теорема 1. Если существует положительная функция Ляпунова $V(t, x)$, определенная на некотором множестве $\Delta^* = \{(t, x) : t \geq 0, \|x\| \geq R, R > 0\}$ и обладающая свойствами А и В, и если $\frac{dV}{dt}|_{(1)} \leq 0$ внутри Δ^* , то решения системы (1) равномерно ограничены.

2. В работе [3] авторами рассматривались линейная неоднородная система и система общего вида, сингулярно возмущенные по части переменных. Были получены достаточные условия для равномерной асимптотической устойчивости. При этом оценивалась связь решения исходной системы и решения соответствующей вырожденной системы. Для этого на асимптотическую устойчивость исследовалась система дифференциальных уравнений относительно разностей между этими решениями. В данной работе используется аналогичный прием.

Рассмотрим систему сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)y + f_1(t, x, y), \\ \mu \dot{y} = C(t)x + D(t)y + f_2(t, x, y), \end{cases} \quad (2)$$

где $x \in R^k$, $y \in R^m$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ — непрерывно дифференцируемые матрицы соответствующих размерностей, ограниченные вместе со своими первыми производными, $|D(t)|^2 > \alpha > 0$, $f_1(t, x, y)$ и $f_2(t, x, y)$ — непрерывные ограниченные отображения, $\mu > 0$.

Требуется найти условия на правую часть системы (2), при выполнении которых будет существовать такой интервал $(0; \mu_0)$, что при всех $\mu \in (0; \mu_0)$ решения системы (2) будут равномерно ограниченными.

Для этого рассмотрим линейную однородную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)y, \\ \mu \dot{y} = C(t)x + D(t)y \end{cases} \quad (3)$$

и соответствующую ей вырожденную систему, т. е. систему (3) при $\mu = 0$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + B(t)\bar{y}, \\ C(t)\bar{x} + D(t)\bar{y} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) имеет алгебро-дифференциальную структуру. Второе ее уравнение разрешимо относительно переменной $\bar{y}$

$$\bar{y} = -D^{-1}(t)C(t)\bar{x} = F(t)\bar{x}.$$

Делаем подстановку этого равенства в первое уравнение системы (4), получаем систему дифференциальных уравнений более низкого порядка

$$\dot{\bar{x}} = G(t)\bar{x}, \quad (5)$$

где $G(t) = A(t) + B(t)F(t)$.

Теперь введем в рассмотрение функции

$$\xi(t, \mu) = x(t, \mu) - \bar{x}(t), \quad (6)$$

$$\eta(t, \mu) = y(t, \mu) - F(t)x(t, \mu),$$

где $x(t, \mu)$ и $y(t, \mu)$ — решения системы (2). Дифференцируя эти функции и учитывая (2) и (5), получаем систему

$$\begin{cases} \dot{\xi} = G(t)\xi + B(t)\eta + \\ + f_1(t, \xi + \bar{x}, F(t)\xi + \eta + F(t)\bar{x}), \\ \dot{\eta} = -\left(\dot{F}(t) + F(t)B(t)\right)\xi + \\ + \left(\frac{1}{\mu}D(t) - F(t)B(t)\right)\eta + f_2(t, \xi, \eta, \mu), \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} f_3(t, \xi, \eta, \mu) &= \frac{1}{\mu}C(t)\bar{x} + \\ &+ \frac{1}{\mu}f_2(t, \xi + \bar{x}, F\xi + \eta + F\bar{x}) - \dot{F}\bar{x} - \\ &- Ff_1(t, \xi + \bar{x}, F\xi + \eta + F\bar{x}). \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

- а) решения системы (5) равномерно ограничены;
- б) решения системы

$$\dot{y} = D(\tau)y \quad (8)$$

равномерно ограничены при каждом τ . Тогда найдется такое $\mu_0 > 0$, что при всех $\mu \in (0; \mu_0)$ решения системы (1) будут равномерно ограниченными.

Доказательство. Поскольку системы (5) и (8) являются линейными однородными, то равномерная ограниченность для них эквивалентна равномерной асимптотической устойчивости [2]. Поэтому существуют две положительно определенные симметричные матрицы $U(t) \in R^{k,k}$ и $V(\tau) \in R^{m,m}$, для которых будут выполняться соотношения

$$\frac{d}{dt} \langle x, U(t)x \rangle \Big|_{(5)} =$$

$$= \langle x, (\dot{U}(t) + 2U(t)F(t))x \rangle = -\omega_1(x) < 0,$$

$$\left. \frac{d}{dt} \langle y, V(\tau)x \rangle \right|_{(8)} = \quad (9)$$

$$= \langle y, 2V(\tau)D(\tau)y \rangle = \langle -\omega_2(y) \rangle < 0.$$

Рассмотрим положительно определенную функцию

$$W(t, \xi, \eta) = \langle \xi, U(t)\xi \rangle + \langle \eta, V(t)\eta \rangle.$$

Ее полная производная по t в силу системы (7) имеет вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{dW}{dt} \right|_{(7)} &= \langle \xi, \dot{U}(t)\xi \rangle + \\ &+ 2 \langle \xi, U(t)G(t)\xi \rangle + 2 \langle \xi, U(t)B(t)\eta \rangle - \\ &- 2 \langle \eta, V(t)(\dot{F}(t) + F(t)B(t))\xi \rangle + \\ &+ \langle \eta, \dot{V}(t)\eta \rangle + \quad (10) \\ &+ \langle \eta, V(t)(\frac{1}{\mu}D(t) - F(t)B(t))\eta \rangle + \\ &+ 2 \langle \xi, U(t)f_1(t, \xi + \bar{x}, F(t)\xi + \eta + F(t)\bar{x}) \rangle + \\ &+ 2 \langle \eta, V(t)f_2(t, \xi + \bar{x}, F(t)\xi + \eta + F(t)\bar{x}) \rangle \end{aligned}$$

Как видно, правая часть выражения (10) является суммой квадратичной и линейной формы относительно вектора (ξ, η) . Так как коэффициенты линейной формы ограничены, то знак выражения (10) вне некоторого шара достаточно большого радиуса будет определяться знаком квадратичной формы. Рассмотрим матрицу этой квадратичной формы, взятой с обратным знаком

$$\begin{vmatrix} -\dot{U}(t) - 2U(t)G(t) & -2U(t)B(t) \\ 2V(t)(\dot{F}(t) + F(t)B(t)) & -\dot{V}(t) - \frac{1}{\mu}V(t)D(t) + V(t)F(t)B(t) \end{vmatrix}. \quad (11)$$

В силу соотношений (9) матрицы $-\dot{U}(t) - 2U(t)G(t)$ и $-\dot{V}(t) - \frac{1}{\mu}V(t)D(t)$ соответствуют положительно определенным квадратичным формам, т. е. все главные последовательные миноры этих матриц положительны [1]. Поэтому, найдется такое $\mu_0 > 0$, что при всех $\mu \in (0; \mu_0)$ все главные последовательные миноры матрицы (11) будут также положительны. Квадратичная форма, соответствующая матрице (11), будет определена положительно, а исходная квадратичная форма — определена отрицательно. Тогда при некотором достаточно большом $R > 0$ имеем

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{(7)} < 0, \quad \|(\xi, \eta)\| \geq R.$$

Заметим к тому же, что функция $W(t, \xi, \eta)$ обладает свойствами A и B , а значит удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, решения системы (7) равномерно ограничены. В силу равенств (6) решения исходной системы (2) также равномерно ограничены. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим сингулярно возмущенную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + (\sin t + 2)y + e^{-x^2} \\ \mu \dot{y} = \cos t x - (\sin t + 2)y + e^{-y^2} \end{cases} \quad (12)$$

С учетом обозначений, введенных ранее, имеем:

$$A(t) = -2, \quad B(t) = \sin t + 2,$$

$$C(t) = \cos t, \quad D(t) = -(\sin t + 2),$$

$$f_1 = e^{-x^2}, \quad f_2 = e^{-y^2},$$

$$G(t) = A(t) - B(t)D^{-1}(t)C(t) = \cos t - 2.$$

Все эти функции ограничены вместе со своими первыми производными. При этом $|D(t)| = |\sin t + 2| > 1$. Система (5) для системы (12) будет иметь вид

$$\dot{\bar{x}} = (\cos t - 2)\bar{x}.$$

Можно убедиться, что ее решения будут равномерно ограничены, взяв в качестве функции Ляпунова функцию $V_1 = \bar{x}^2$.

Система (8) в данном случае будет иметь вид

$$\dot{y} = -(\sin t + 2)y.$$

Ее решения также будут равномерно ограничены, что можно проверить взяв функцию Ляпунова $V_2 = y^2$.

Таким образом, условия теоремы 2 выполняются, и решения системы (12) должны быть равномерно ограничены при всех достаточно малых $\mu > 0$.

Проверить это можно, подобрав функцию Ляпунова, которая удовлетворяла бы требованиям теоремы 1 при всех достаточно малых $\mu > 0$. Таковой, например, будет функция $V = x^2 + \mu y^2$. Действительно, если $0 < \mu < 1$, то $\mu(x^2 + y^2) < V < x^2 + y^2$, т. е. она обладает свойствами A и B . Полная производная этой функции в силу системы (12) имеет вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(12)} &= -4x^2 + 2(\sin t + 2 + \cos t)xy - \\ &- 2(\sin t + 2)y^2 + 2xe^{-x^2} + 2ye^{-y^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Выпишем матрицу квадратичной формы из правой части равенства (13)

$$\begin{pmatrix} -4 & \sin t + 2 + \cos t \\ \sin t + 2 + \cos t & -2(\sin t + 2) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Ее главные последовательные миноры будут равны $d_1 = -4$, $d_2 = 8(\sin t + 2) - (\sin t + 2 + \cos t)^2$. При этом можно убедиться, что $d_2 > 6$ при всех $t \in R$. Тогда согласно критерию Сильвестра [1] квадратичная форма с

матрицей (14) будет определено отрицательной. Выражение $2xe^{-x^2} + 2ye^{-y^2}$ можно рассматривать как линейную форму с ограниченными коэффициентами. Значит знак выражения (13) будет определяться знаком квадратичной формы с матрицей (14) при $x^2 + y^2 > r$, где $r > 0$ достаточно велико, т. е. будет отрицательным. Значит, согласно теореме 1 решения системы (12) действительно будут равномерно ограничены.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1967. — 576 с.
2. Йосидзавы Т. Функция Ляпунова и ограниченность решений / Т. Йосидзавы // Сб. переводов «Математика». — Мкр. — 1955. — С. 95–127.
3. Климушев А. И. Равномерная асимптотическая устойчивость систем уравнений с малым параметром перед производными / А. И. Климушев, Н. Н. Красовский // Прикл. математика и механика. — 1962. — Т. 25. — С. 1011–1025.

Поступила 27.10.10.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Р. Б. Лаппина

Распространяется теорема Йосидзавы — Ла Салля об асимптотической устойчивости на системы функционально-дифференциальных уравнений общего вида.

Рассмотрим систему

$$x'(t) = f(t, x(s)), \quad (1)$$

где $\alpha \leq s \leq t$, $t \in R_+$, $R_+ = [0, +\infty)$, f — функционал, непрерывный при $t \in R_+$ и принимающий значения в R^n ; $x: R_+ \rightarrow R^n$ есть непрерывная функция, где $R_+ = [\alpha, t)$. Если $\alpha = -\infty$, то будем считать, что $x: (-\infty, t) \rightarrow R^n$. Предположим, что функционал f локально липшицев по x , т. е. для каждого $\tau > 0$ и каждого компакта $Q \subset R^n$ существует постоянная c , вообще говоря, зависящая от τ и Q такая, что

$$|f(t, x(\cdot)) - f(t, y(\cdot))| \leq c \|x - y\|, \quad (2a)$$

$$\forall t \in [0, \tau], \quad x, y: [\alpha, \tau] \rightarrow Q. \quad (2b)$$

Введем обозначения:

$$\|x\| := \max_t |x_t|, \quad x \in R^n; \quad (3a)$$

$$\|\phi\| := \sup |\phi(t)| \quad \forall t \in [a, b]; \quad (3b)$$

$$R_{t_0} = [t_0, \infty). \quad (3b)$$

Пусть $t_0 \geq 0$ и начальная функция $\Phi: [\alpha, t_0] \rightarrow R^n$ непрерывна. Известно [1], что существует решение $x(t, t_0, \Phi)$ системы (1) на интервале $[t_0, \beta)$, удовлетворяющее условию

$$x(t, t_0, \Phi) = \Phi(t), \quad \alpha \leq t \leq t_0. \quad (4)$$

Это решение может быть продолжено на интервале $[\alpha, \bar{\beta}]$, где $\bar{\beta} = \infty$ или

$$\lim_{t \rightarrow \bar{\beta}} x(t, t_0, \Phi) = \infty, \quad t \rightarrow \bar{\beta}. \quad (5)$$

Предположим, что f является достаточно гладким функционалом, для которого существует решение для каждой непрерывной начальной функции Φ , и что если решение остается ограниченным, то оно может быть продолжено на все значения положительной полуоси.

Определение 1 [1]. Непрерывный функционал

$$v(t, x(s)), \quad \alpha \leq s \leq t, \quad t \in R_+ \quad (6)$$

называется функционалом Ляпунова, если:

1) $V(t, x(s))$ непрерывен при $t \in R_+$, где $x: [\alpha, t) \rightarrow R^n$ есть непрерывная функция;

2) $v(t, x(s))$ локально липшицев по x ;

3) $v(t, x(\cdot))$ ограничен снизу для ограниченных функций $x(\cdot)$; (7a)

4) $Dv(t, x(\cdot)) \leq 0$, (7b)

где производная Dv вдоль решения $x(\cdot)$ системы (1) определяется соотношением

$$Dv(t, x(\cdot)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t, x^*(\cdot)) - v(t, x(\cdot))}{\Delta t}, \quad (8a)$$

где

$$x^*(\cdot) = \begin{cases} x(s), & \text{если } \alpha \leq s \leq t \\ x(s) + f(t, x(\cdot))(s - t), & \text{если } t \leq s \leq t + \Delta t. \end{cases} \quad (8b)$$

Имеет место следующее предложение, являющееся аналогом теоремы Йосидзава – Ла Саллы для обыкновенной дифференциальной системы (1).

Теорема 1. Пусть:

1) $x(t)$ – ограниченное решение функционально-дифференциальной системы (1);

2) $v(t, x(\cdot))$ есть функционал Ляпунова системы (1) такой, что

$$Dv(t, x) \leq -W_1(x(t)), \quad (9a)$$

где W_1 – положительно определенная функция относительно замкнутого множества $Z \subset R^n$, т. е. для любого компактного множества $Q \subset R^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $c_1 > 0$ такое, что

$$W_1(x) > c_1, \quad \forall x \in Q \cap N^c(\varepsilon, Z), \quad (9b)$$

где $N^c(\varepsilon, Z)$ – дополнение окрестности $N(\varepsilon, Z)$ множества Z ;

3) существует неотрицательная функция $W_2: R_+ \times N \rightarrow R_+$, где N – открытая окрестность множества Z , такая, что для каждого компактного подмножества $Q \subset N$ имеем:

$$\begin{aligned} &\text{а) } \forall \varepsilon_1 > 0, \exists \mu > 0, W_2(t, x) > \mu \\ &\forall x \in Q \cap N^c(\varepsilon_1, Z); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &\text{б) } \forall \mu > 0, \exists \varepsilon_2 > 0, W_2(t, x) \leq \frac{\mu}{2} \\ &\forall x \in Q \cap N(\varepsilon_2, Z); \end{aligned} \quad (11)$$

в) производная $DW_2(t, x(t))$ ограничена сверху, т. е.

$$\exists c_1, DW_2(t, x(t)) \leq c_1, \quad x(t) \in Q. \quad (12)$$

Тогда

$$x(t) \rightarrow Z, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда для функционально-дифференциальной системы (1) существует решение $x(t)$, не приближающееся к Z .

Имеем

$$\exists Q \subset R^n, \quad x(t) \in Q \quad t \in R_{t_0}, \quad (14)$$

где Q – компактное множество. Кроме того, имеем

$$\exists \varepsilon > 0, \quad N(2\varepsilon, Z) \cap Q \subset N, \quad (15a)$$

$$\exists \{t_k\}, \quad t_k \rightarrow \infty, \quad \rho(x(t_k), Z) = \varepsilon. \quad (15b)$$

Обозначим $M := Q \cap \overline{N}(\varepsilon, Z)$, где $\overline{N}(\varepsilon, Z)$ – замыкание множества $N(\varepsilon, Z)$.

По условию теоремы для компактного множества $M \subset N$ и числа $\varepsilon_1 > 0$ всегда можно найти такие числа μ и ε_2 , что $0 \leq 2\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$.

По условию (9) имеем

$$\exists \{s_k\}, \quad s_k \rightarrow \infty, \quad \rho(x(s_k), Z) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\exists \{t_k\}, \exists \{\sigma_k\}, t_k \rightarrow \infty, \\ &\sigma_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\rho(x(t_k), Z) = \varepsilon_1, \quad \rho(x(\sigma_k), Z) = \frac{\varepsilon_2}{2} \quad (17b)$$

$$\frac{\varepsilon_2}{2} \leq \rho(x(t), Z) \leq \varepsilon_1. \quad (17в)$$

В силу условий теоремы

$$\exists c, DW_2(t, x(t)) \leq c \quad \exists t \in [\sigma_k, t_k]. \quad (18a)$$

Интегрируя неравенство (18а) в интервале от σ_k до t_k , получим

$$W_2(t_k, x(t_k)) - W_2(\sigma_k, x(\sigma_k)) \leq \quad (18б)$$

$$\leq c(t_k - \sigma_k).$$

Так как

$$W_2(t_k, x(t_k)) > \mu, \quad W_2(\sigma_k, x(\sigma_k)) \leq \frac{\mu}{2}, \quad (19)$$

то получим

$$\frac{\mu}{2} < \frac{1}{2} W_2(t_k, x(t_k)) < W_2(t_k, x(t_k)) -$$

$$- W_2(\sigma_k, x(\sigma_k)) \leq c(t_k - \sigma_k). \quad (20)$$

Окончательно имеем

$$t_k - \sigma_k \geq \frac{1}{2} \mu c^{-1} \quad (21)$$

По условию теоремы

$$Dv(t, x(\cdot)) \leq -W_1(x(t)), \quad t \geq t_k, \quad (22)$$

где W_1 является положительно определенной функцией относительно множества Z . В силу этого существует такое число c_1 , что

$$v(t, x(\cdot)) \leq v(t_0, \Phi) - \int_{t_0}^t W_1(x(u)) du \leq$$

$$\leq v(t_0, \Phi) - \sum_{i=1}^k \int_{\sigma_i}^{t_i} W_1(x(u)) du \leq \quad (23)$$

$$\leq v(t_0, \Phi) - \sum_{i=1}^k \int_{\sigma_i}^{t_i} c_1 du = v(t_0, \Phi) - \frac{1}{2} k \mu c_1 c^{-1}$$

Переходя к пределу в (23) при $k \rightarrow \infty$, получим, что $v(t, x(\cdot)) \rightarrow \infty$. Это противоречит условию 3) определения 1 функционала Ляпунова. Теорема доказана.

Введем функции $K_i: R_+ \rightarrow R_+$, которые обладают свойствами: $K_i(0) = 0$, $K_i(t) > 0$, $t > 0$, $K_i(t)$ строго возрастают с возрастанием t .

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Пусть:

1) $x(t)$ есть ограниченное решение системы (1);

2) $v(t, x(s))$ — функционал Ляпунова для системы (1), удовлетворяющий условию

$$Dv(t, x) \leq -K_1(|x|); \quad (24)$$

3) существует неотрицательная локально липшицева функция $W: R_+ \times R^n \rightarrow R_+$ такая, что

$$K_2(|x|) \leq W(t, x(t)) \leq K_3(|x|); \quad (25)$$

4) производная $DW(t, x(t))$ ограничена сверху для любой непрерывной функции $x(t)$, определенной на R_+ . Тогда

$$x(t) \rightarrow \{0, \dots, 0\}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Доказательство. Легко проверяется, что для множества $Z = \{0, \dots, 0\}$, $N = R^n$ выполнены условия теоремы 1. Значит все ограниченные решения системы (1) приближаются к $Z = \{0, \dots, 0\}$ при $t \rightarrow \infty$. Доказательство теоремы 2 завершено.

Нетрудно видеть, что обыкновенная дифференциальная система

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (27)$$

является частным случаем функционально-дифференциальной системы (1).

Т. Йосидзава [3] и Ж. П. Ла Салль [2] доказали следующее предложение:

Теорема 3 [2–3]. Пусть $v: R_+ \times R^n \rightarrow R^1$ непрерывна, локально липшицева по x и ограничена снизу на каждом цилиндре $R_\alpha \times P$ с компактным основанием $P \subset R^n$,

$$Dv(t, x) \leq -W(x) \leq 0. \quad (28)$$

Если $|f(t, x)|$ ограничена для ограниченных $|x|$, то каждое ограниченное решение дифференциальной системы (27) стремится при $t \rightarrow +\infty$ к множеству $Z = \{x: W(x) = 0\}$.

Замечание. Производная в (28) определяется соотношением

$$Dv(t, x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} h^{-1} [v(t+h, x+hf(t, x)) - v(t, x)]. \quad (29)$$

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 3. Обозначим $W_1(x) = \rho(x, Z)$, где $\rho(x, Z)$ есть расстояние от x до множества Z . Функция $W_1(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|W_1(x^1) - W_1(x^2)| \leq |x^1 - x^2|.$$

Производная

$$DW_1(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{W_1(x + hf(t, x)) - W_1(t, x)\}$$

ограничена для ограниченных $|x|$, т. к.

$$|DW_1(x)| \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} |x + hf(t, x) - x| = |f(t, x)|. \quad (30)$$

Кроме того, функция $W_1(x)$ удовлетворяет условиям (10)–(11), следовательно, условия теоремы 1 выполнены. Теорема 3 доказана.

Теорема Йосидзавы — Ла Салля для дифференциальной системы является частным случаем теоремы 1 для функционально-дифференциальной системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Driver R. D. Existence and Stability of a Delay – Differential System / R. D. Driver. – Arch. Rational Mech. Anal. – 1962. – Vol. 10. – P. 401–426.
2. La Salle J. P. Stability theory for Ordinary Differential Equations / J. P. La Salle // Differential Equations. – 1968. – № 4. – P. 57–65.
3. Yoshizawa T. Asymptotic behavior of solution of a system of differential equations / T. Yoshizawa // Contrib. to Differential Equations – 1963. – № 1. – P. 317–387.

Поступила 01.11.10.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

В. И. Никонов

Даны условия устойчивости относительно части переменных линейных автономных систем дифференциальных уравнений, линейных дискретных систем и линейных систем с отклоняющимся аргументом.

1. Системы линейных дифференциальных уравнений

Пусть поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A^* x(t), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $A \in R^{n \times n}$

К настоящему времени получены критерии устойчивости по заданной части координат фазового вектора линейной автономной системы вида (1) [1; 3]. Следует отметить, что этими результатами уже нельзя воспользоваться если предположить, что матрица A^* системы (1) известна с определенной степенью точности, например, интервальная. Можно сказать, что эти методы чувствительны к изменениям коэффициентов матрицы системы.

В данной работе предлагается геометрический подход, позволяющий в некоторых случаях исследовать робастную устойчивость системы (1) по отношению к части переменных.

Предположим, что исследуется устойчивость по первой координате фазового вектора

x системы (1). Обозначим первую координату фазового вектора через y , а остальные компоненты составят вектор z . В связи с этим систему (1) представим в виде

$$\frac{dy}{dt} = ay + b^T z, \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = cy + Dz,$$

где $y \in R$, $z \in R^{n-1}$, $a \in R$, $b \in R^{n-1}$, $c \in R^{n-1}$, $D \in R^{(n-1) \times (n-1)}$, T – знак операции транспонирования.

Предположим, что многочлен

$$\sigma(\lambda) = \lambda^s + \gamma_1 \lambda^{s-1} + \dots + \gamma_{s-1} \lambda + \gamma_s,$$

где $0 \leq s \leq n-1$ является минимальным аннулирующим многочленом вектора b^T относительно линейного оператора, заданного матрицей D . Тогда справедливо соотношение

$$b^T D^s + \gamma_1 b^T D^{s-1} + \dots + \gamma_{s-1} b^T D + \gamma_s b^T = 0. \quad (3)$$

Следует отметить, что в этом случае век-

© В. И. Никонов, 2010

торы $b^T, b^T D, \dots, b^T D^{s-1}$ образуют базис инвариантного циклического подпространства в R^{n-1} [2].

Покажем, каким же образом устойчивость переменной y связана с этим подпространством.

Продифференцируем первое уравнение системы (2) по переменной t в силу второго уравнения этой системы, получим

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a \frac{dy}{dt} + b^T c y + b^T D z. \quad (4)$$

Аналогично второе дифференцирование уравнения (4) дает

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = a \frac{d^2 y}{dt^2} + b^T c \frac{dy}{dt} + b^T D c y + b^T D^2 z.$$

Тогда на $s-1$ и s -м шаге получаем соответственно уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^s y}{dt^s} &= a \frac{d^{s-1} y}{dt^{s-1}} + b^T c \frac{d^{s-2} y}{dt^{s-2}} + b^T D c \frac{d^{s-3} y}{dt^{s-3}} + \\ &+ \dots + b^T D^{s-2} c y + b^T D^{s-1} z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{s+1} y}{dt^{s+1}} &= a \frac{d^s y}{dt^s} + b^T c \frac{d^{s-1} y}{dt^{s-1}} + b^T D c \frac{d^{s-2} y}{dt^{s-2}} + \\ &+ \dots + b^T D^{s-1} c y + b^T D^s z. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d^{s+1} y}{dt^{s+1}} + \gamma_1 \frac{d^s y}{dt^s} + \dots + \gamma_s \frac{dy}{dt} &= a \frac{d^s y}{dt^s} + \\ &+ \sum_{j=0}^{s-1} b^T D^j c \frac{d^{s-1-j} y}{dt^{s-1-j}} + \\ &+ \gamma_1 \left(a \frac{d^{s-1} y}{dt^{s-1}} + \sum_{j=0}^{s-2} b^T D^j c \frac{d^{s-2-j} y}{dt^{s-2-j}} \right) + \dots + \\ &+ \gamma_{s-1} \left(a \frac{dy}{dt} + b^T c y \right) + \gamma_s a y + \\ &+ (b^T D^s + \gamma_1 b^T D^{s-1} + \dots + \gamma_s b^T) z. \end{aligned}$$

Наконец, учитывая (3), приходим к линейному однородному дифференциальному урав-

нению

$$\begin{aligned} \frac{d^{s+1} y}{dt^{s+1}} + (\gamma_1 - a) \frac{d^s y}{dt^s} + \\ + (\gamma_2 - a\gamma_1 - b^T c) \frac{d^{s-1} y}{dt^{s-1}} + \dots + \\ + (\gamma_s - a\gamma_{s-1} - b^T c\gamma_{s-2} - \dots - \\ - b^T D^{s-3} c\gamma_1 - b^T D^{s-2} c) \frac{dy}{dt} - \\ - (a\gamma_s + b^T c\gamma_{s-1} + b^T D c\gamma_{s-2} + \dots + \\ + b^T D^{s-2} c\gamma_1 + b^T D^{s-1} c) y = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно, вопрос об устойчивости системы (2) по переменной y сводится к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения (5). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если s степеней минимального аннулирующего многочлена вектора b^T относительно линейного оператора, заданного матрицей D , то для того чтобы система (2) была y -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения (5) было устойчивым.

Теорема 2. В предположениях теоремы 1 для того, чтобы система (2) была асимптотически y -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы многочлен

$$\begin{aligned} P_s(\lambda) &= \lambda^{s+1} + (\gamma_1 - a)\lambda^s + \\ &+ (\gamma_2 - a\gamma_1 - b^T c)\lambda^{s-1} + (\gamma_3 - a\gamma_2 - \\ &- \dots - b^T c\gamma_{s-2} - \dots - b^T D^{s-3} c\gamma_1 - \\ &- b^T D^{s-2} c)\lambda - (a\gamma_s + b^T c\gamma_{s-1} + \\ &+ b^T D c\gamma_{s-2} + \dots + b^T D^{s-2} c\gamma_1 + b^T D^{s-1} c) = 0 \end{aligned}$$

был устойчивым.

Следствие 1. Если $s = n-1$, то система (2) приводима к дифференциальному уравнению n -го порядка относительно переменной y . В этом случае характеристическое уравнение системы (2) совпадает с характеристическим уравнением дифференциального уравнения (5), а следовательно, y -устойчивость системы (2) возможна лишь в случае устойчивости системы по всем координатам фазового вектора x .

Следствие 2. Если $s = k < n-1$, то в системе (1) можно выделить подсистему k -го порядка относительно переменной y и некоторых дополнительных переменных.

При этом интегрирование системы (1) сводится к последовательному интегрированию двух подсистем порядка k и $n - k$, соответственно.

Замечание 1. Постоянные $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, присутствующие в уравнении (5), можно выразить через числовые коэффициенты системы (2). Для этого достаточно умножить скалярно (3) справа последовательно на векторы $b, D^T b, \dots, (D^T)^{s-1} b$ и решить полученную систему линейных уравнений относительно $\gamma_1, \dots, \gamma_s$.

Замечание 2. Если требуется исследовать устойчивость фазового вектора системы (1) по нескольким переменным, то для этого последовательно представляем систему (1) в виде (2), где y – другая интересующая нас переменная, и используем теорему 1.

2. Системы линейных разностных уравнений

Рассмотрим линейную разностную систему вида

$$x(t+1) = A^* x(t), \quad (6)$$

где $x \in R^n$, A – постоянная матрица соответствующих размеров. Так же будем предполагать, что исследуется на устойчивость первая координата фазового вектора x . В связи с чем представим систему (6) в виде

$$\begin{aligned} y(t+1) &= ay(t) + b^T z(t), \\ z(t+1) &= cy(t) + Dz(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть минимальный аннулирующий многочлен вектора b^T имеет вид (3).

Проведем аналогичные рассуждения и в данном случае. Из первого уравнения системы (6) следует

$$y(t+2) = ay(t+1) + b^T z(t+1),$$

откуда в силу второго уравнения этой системы имеем

$$y(t+2) = ay(t+1) + b^T cy(t) + b^T Dz(t).$$

Таким образом, на s -м шаге (s – степень минимального многочлена (3)) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} y(t+s+1) &= ay(t+s) + b^T cy(t+s-1) + \\ &+ \dots + b^T D^{s-1} cy(t) + b^T D^s z. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\begin{aligned} y(t+s+1) + \gamma_1 y(t+s) + \dots + \gamma_s y(t+1) &= \\ = ay(t+s) + \sum_{j=0}^{s-1} b^T D^j cy(t+s-j-1) + \\ &+ \gamma_1 (ay(t+s-1) + \\ &+ \sum_{j=0}^{s-2} b^T D^j cy(t+s-j-2)) + \dots + \\ &+ \gamma_{s-1} (ay(t+1) + b^T cy(t)) + \gamma_s ay(t) + \\ &+ (b^T D^s + \gamma_1 b^T D^{s-1} + \dots + \gamma_s b^T) z(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} y(t+s+1) &= (\gamma_1 - a)y(t+s) + \\ &+ (\gamma_2 - a\gamma_1)y(t+s-1) + \dots + \\ &+ (\gamma_s - a\gamma_{s-1} - b^T cy_{s-2} - \dots - \\ &- b^T D^{s-3} cy_1 - b^T D^{s-2} c)y(t+1) - \\ &- (a\gamma_s + b^T cy_{s-1} + b^T Dcy_{s-2} + \dots + \\ &+ b^T D^{s-2} cy_1 + b^T D^{s-1} c)y(t) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если в степень минимального аннулирующего многочлена вектора b^T относительно линейного оператора, заданного матрицей D , то для того чтобы система (6) была y -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения (9) было устойчивым.

3. Системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Данный подход применим и к исследованию y -устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Исследуем y -устойчивость системы вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A^* x(t-\tau), \quad (3)$$

где $x \in R^n$, $\tau = \text{const}$, A^* – постоянная матрица соответствующих размеров.

Представим систему (3) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= ay(t-\tau) + b^T z(t-\tau), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= cy(t-\tau) + Dz(t-\tau). \end{aligned} \quad (4)$$

Далее, дифференцируя первое уравнение системы (11), получим

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = a \frac{dy(t-\tau)}{dt} + b^T \frac{dz(t-\tau)}{dt},$$

откуда следует, что справедливо соотношение

$$\frac{d^2 y(t+\tau)}{dt^2} = a \frac{dy(t)}{dt} + b^T \frac{dz(t)}{dt},$$

которое в силу второго уравнения системы (10) приводит к уравнению

$$\frac{d^2 y(t+\tau)}{dt^2} = a \frac{dy(t)}{dt} + b^T c y(t-\tau) + b^T D z(t-\tau).$$

Проведя аналогичные рассуждения к получаемому уравнению, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y(t+2\tau)}{dt^2} &= a \frac{d^2 y(t+\tau)}{dt^2} + b^T c \frac{dy(t)}{dt} + \\ &+ b^T D c y(t-\tau) + b^T D^2 z(t-\tau). \end{aligned}$$

Таким образом, на $s-1$ -м и s -м шагах получаем, соответственно, уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^s y(t+(s-1)\tau)}{dt^s} &= a \frac{d^{s-1} y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-1}} + \\ &+ b^T c \frac{d^{s-2} y(t+(s-3)\tau)}{dt^{s-2}} + \dots + \\ &+ b^T D^{s-1} c y(t-\tau) + b^T D^{s-1} z(t-\tau), \\ \frac{d^{s+1} y(t+s\tau)}{dt^{s+1}} &= a \frac{d^s y(t+(s-1)\tau)}{dt^s} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ b^T c \frac{d^{s-1} y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-1}} + \dots + \\ &+ b^T D^s c y(t-\tau) + b^T D^s z(t-\tau). \end{aligned}$$

Если предположить, что s – степень минимального аннулирующего многочлена вектора b^T относительно линейного оператора заданного матрицей D , то приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^{s+1} y(t+s\tau)}{dt^{s+1}} &+ (\gamma_1 - a) \frac{d^s y(t+(s-1)\tau)}{dt^s} + \\ &+ (\gamma_2 - a\gamma_1 - b^T c) \times \\ &\times \frac{d^{s-1} y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-1}} + \dots + \\ &+ (\gamma_s - a\gamma_{s-1} - \dots - b^T D^{s-1} c \gamma_1 - \\ &- b^T D^{s-2} c) \frac{dy(t)}{dt} - (a\gamma_s + b^T c \gamma_{s-1} + \dots + \\ &+ b^T D^{s-2} c \gamma_1 + b^T D^{s-1}) y(t-\tau). \end{aligned} \quad (12)$$

Следовательно, вопрос y -устойчивости системы (10) сводится к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения (12). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Если s степень минимального аннулирующего многочлена вектора b^T относительно линейного оператора, заданного матрицей D , то для того чтобы система (10) была y -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения (12) было устойчивым.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Воронников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных / В. И. Воронников. – М. : Наука, 1991. – 288 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
3. Чудинов К. М. Критерий устойчивости по части переменных автономной системы дифференциальных уравнений / К. М. Чудинов // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 2003. – № 4 (491). – С. 67–72.

Поступила 05.10.10.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Е. А. Лизина

Рассматривается вопрос о сведении задачи об устойчивости движения относительно части переменных непрерывно-дискретной системы к задаче об устойчивости движения по всем переменным для некоторой вспомогательной системы.

Рассмотрим непрерывно-дискретную систему уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = \bar{A}x + \bar{B}u(kh), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$, $r \leq n$, $\bar{A}$ – постоянная матрица размерности $n \times n$; $\bar{B}$ – постоянная матрица размерности $n \times r$. Управление $u = (u_1, \dots, u_r)^T$ зависит от дискретных моментов времени и представляет собой кусочно-постоянную функцию, т. е. $u(t) = u(kh)$, $t \in [kh; (k+1)h]$. Здесь $h > 0$ – некоторая постоянная, $k = 0, 1, 2, \dots$; $x(0)$ – начальные данные системы, верхний индекс T означает транспонирование. Пусть управление задано в виде

$$u(kh) = Kx(kh), \quad (2)$$

где K есть постоянная матрица размерности $r \times n$.

Представим вектор x в виде $x = (x_1, \dots, x_n)^T = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p)^T = (y, z)^T$, $m > 0$, $p > 0$, $m + p = n$. Тогда система (1) с учетом управления (2) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + Bz + Py(kh) + Qz(kh), \\ \dot{z} &= Cy + Dz + Ny(kh) + Lz(kh), \end{aligned} \quad (3)$$

где A, B, C, D, P, Q, N, L – постоянные матрицы соответствующих размерностей, или

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \sum_{k=1}^m a_{ik} y_k + \sum_{l=1}^p b_{il} z_l + \\ &+ \sum_{r=1}^m p_{ir} y_r(kh) + \sum_{h=1}^p q_{ih} z_h(kh), \\ \frac{dz_j}{dt} &= \sum_{k=1}^m c_{jk} y_k + \sum_{l=1}^p d_{jl} z_l + \end{aligned} \quad (4)$$

$$+ \sum_{r=1}^m n_{jr} y_r(kh) + \sum_{h=1}^p l_{jh} z_h(kh),$$

$$i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, p}.$$

Для исследования задачи об асимптотической устойчивости положения равновесия $y_i = 0, z_j = 0$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, p}$) системы (3) по отношению к $y_1, \dots, y_m$ воспользуемся идеей В. И. Воротникова [1] построения некоторой вспомогательной системы дифференциальных уравнений, называемой μ -системой. На основании анализа устойчивости μ -системы делается вывод об устойчивости по отношению к части переменных положения равновесия исходной системы.

Приведем систему (1) к μ -системе. Рассмотрим векторы $b_i = (b_{i1}, \dots, b_{ip})$ ($i = \overline{1, m_1}$), составленные из соответствующих коэффициентов системы (3). Новые переменные введем в виде [1, с. 27]

$$\mu_i = \sum_{l=1}^p b_{il} z_l \quad (i = \overline{1, m_1}), \quad (5)$$

где первые m_1 векторов $b_1, \dots, b_{m_1}$ выбираются линейно независимыми, а векторы $b_{m_1+1}, \dots, b_m$ линейно выражаются через них. При этом возможны два случая.

Первый случай. Система (4) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \sum_{k=1}^m a_{ik} y_k + \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_{il} \mu_l + \sum_{r=1}^m p_{ir} y_r(kh) + \\ &+ \sum_{h=1}^{m_1} \beta_{ih} \mu_h(kh), \quad (i = \overline{1, m}), \\ \frac{d\mu_j}{dt} &= \sum_{k=1}^m a_{jk}^* y_k + \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_{jl}^* \mu_l + \sum_{r=1}^m \delta_{jr}^* y_r(kh) + \\ &+ \sum_{h=1}^{m_1} \beta_{jh}^* \mu_h(kh), \quad (j = \overline{1, m_1}), \end{aligned} \quad (6)$$

© Е. А. Лизина, 2010

$$\frac{dz_s}{dt} = \sum_{k=1}^m c_{sk} y_k + \sum_{l=1}^p d_{sl} z_l + \sum_{r=1}^m n_{sr} y_r(kh) + \\ + \sum_{h=1}^p l_{sh} z_h(kh), \quad (s = 1, \dots, p).$$

Здесь α_{jk}^* , α_{il} , β_{ih} , α_{jr}^* , β_{jh}^* , δ_{jr}^* — постоянные. Поведение переменных $y_1, \dots, y_m$ системы (4), относительно которых рассматривается устойчивость положения равновесия, полностью определяется системой

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^m a_{ik} y_k + \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_{il} \mu_l + \sum_{r=1}^m p_{ir} y_r(kh) + \\ + \sum_{h=1}^{m_1} \beta_{ih} \mu_h(kh), \quad (i = 1, \dots, m), \quad (7) \\ \frac{d\mu_j}{dt} = \sum_{k=1}^m a_{jk}^* y_k + \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_{jl}^* \mu_l + \sum_{r=1}^m \delta_{jr}^* y_r(kh) + \\ + \sum_{h=1}^{m_1} \beta_{jh}^* \mu_h(kh), \quad (j = 1, \dots, m_1),$$

называемой μ -системой по отношению к исходной системе (3).

Второй случай. Система (1) не приводится к (7) после введения переменных (5). Если считать, что только первые m_2 ($m_2 < m_1$) переменных d_{jl} из (6) линейно независимы, то имеют место первые m_2 ($m_2 < m_1$) равенств

$$\sum_{l=1}^p d_{jl}^* z_l = \sum_{v=1}^p b_{jv} \left(\sum_{l=1}^p d_{vl} z_l \right) = \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_{jl}^* \mu_l. \quad (8)$$

Тогда остальные $m_1 - m_2$ из равенств (7) невозможны, а система (1) будет состоять из уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^m a_{ik} y_k + \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_{il} \mu_l + \sum_{r=1}^m p_{ir} y_r(kh) + \\ + \sum_{h=1}^{m_1} \beta_{ih} \mu_h(kh), \quad (i = 1, \dots, m), \\ \frac{d\mu_j}{dt} = \sum_{k=1}^m a_{jk}^* y_k + \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_{jl}^* \mu_l + \sum_{r=1}^m \delta_{jr}^* y_r(kh) + \\ + \sum_{h=1}^{m_1} \beta_{jh}^* \mu_h(kh), \quad (j = 1, \dots, m_2), \\ \frac{d\mu_s}{dt} = \sum_{k=1}^m a_{sk}^* y_k + \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_{sl}^* \mu_l + \sum_{r=1}^m \delta_{sr}^* y_r(kh) +$$

$$\sum_{h=1}^{m_1} \beta_{sh}^* \mu_h(kh), \quad (s = m_2 + 1, \dots, m_1), \quad (9)$$

$$\frac{dz_s}{dt} = \sum_{k=1}^m c_{sk} y_k + \sum_{l=1}^p d_{sl} z_l + \sum_{r=1}^m n_{sr} y_r(kh) + \\ + \sum_{h=1}^p l_{sh} z_h(kh), \quad (s = 1, \dots, p), \\ \alpha_{sl}^* = \sum_{v=1}^p b_{sv} d_{vl}, \quad (s = m_2 + 1, \dots, m_1).$$

Пусть первые m_2 из векторов $\alpha_{m_2+1}^{**}, \dots, \alpha_{m_1}^{**}$ ($m_2 \leq m_1 - m_2$) линейно независимы, а остальные линейно выражаются через них. Введем новые переменные

$$\mu_{m_1+\gamma} = \sum_{l=1}^p \alpha_{m_2+\gamma,l}^{**} z_l, \quad (\gamma = \overline{1, m_3}).$$

При этом система сведется либо к системе типа (6) или (9). В первом случае μ -система построена, во втором случае необходимо продолжать введение новых переменных.

Переход к μ -системе имеет смысл только тогда, когда ее размерность меньше размерности исходной системы. Вспомогательные переменные μ -системы выбираются из переменных (в векторном виде)

$$\mu = Bz, \quad \mu^{(1)} = B\dot{z} = BDz, \dots,$$

$$\mu^{(k)} = Bz^{(k)} = BD^k z \quad (1 \leq k \leq p-1).$$

Таким образом, для определения размерности μ -системы, так же как и в случае [1, с. 30], рассматривается матрица

$$K_p = (B^T, D^T B^T, \dots, (D^T)^{p-1} B^T),$$

где B^T, D^T — вектор-столбцы системы (3). А значит, для непрерывно-дискретной системы (1) верны леммы о размерности вспомогательной μ -системы для линейных систем. Приведем их формулировки.

Лемма 1 [1, с. 29]. Для системы (1) введенным $R \leq r$ групп новых переменных типа всегда может быть построена вспомогательная μ -система, размерность которой не превосходит размерности исходной системы.

Лемма 2 [1, с. 31]. Для того чтобы размерность μ -системы была равна $m + h$, необходимо и достаточно, чтобы $\text{rank} K_p = h$.

Переход к системе μ -вида эквивалентен введению вместо переменных $x = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p)^T$ новых переменных $w = (y_1, \dots, y_m, \mu_1, \dots, \mu_h, v_1, \dots, v_r)$ ($m + p = n =$

$= m + h - r$), причем исходная система (1) принимает такой вид, что первые $m + h$ не содержат u_i ($i = \overline{1, r}$).

Установим связь между коэффициентами исходной системы (1) и вспомогательной μ -системы (7). Пусть s – минимальное число такое, что $\text{rank} K_{s-1} = \text{rank} K_s$. Рассмотрим матрицы L_i ($i = \overline{1, 5}$) вида [1, с. 32]:

а) строки матрицы L_1 размера $h \times p$ – линейно независимые вектора-столбцы матрицы K_{s-1} ;

б) столбцы матрицы L_2 размера $h \times h$ – линейно независимые вектора-столбцы матрицы L_1 ;

в) строка с номером i_j ($j = \overline{1, h}$) матрицы L_3 размера $p \times h$ является строкой с номером j матрицы L_2^{-1} – обратной к L_2 , а остальные строки матрицы L_3 – нулевые;

г) L_4 и L_5 – матрицы вида

$$L_4 = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & L_1 \end{pmatrix}, \quad L_5 = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & L_3 \end{pmatrix},$$

где E_m – единичная матрица размера $m \times m$.

Лемма 3. Вспомогательную μ -систему для (1) составят уравнения

$$\dot{\xi} = L_4 A L_3 \xi + L_4 B K L_3 \xi(kh). \quad (10)$$

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству [1, с. 33]. Переход от исходной системы (1) к μ -системе эквивалентен замене переменных $w = Lx$; μ -систему составят первые $m + h$ уравнений системы $\dot{w} = L A L^{-1} w + L B K L^{-1} w(kh)$.

Таким образом, вопрос об асимптотической устойчивости непрерывно-дискретной системы (1) по части переменных сводится к исследованию асимптотической устойчивости вспомогательной системы (10) по всем переменным. Далее, используя теорему В. И. Зубова [2, с. 100] о возможности стабилизации системы вида (9) с помощью дискретного управления, убедимся, что система (3) ((4)) стабилизируется относительно части переменных.

Приведем формулировку данной теоремы для системы (10).

Теорема. Если векторы $K_s = (B^T, D^T B^T, \dots, (D^T)^{s-1} B^T)$ линейно независимы, то существуют коэффициенты усиления K (управление (2)) и величина h такие, что нулевое решение системы (10) будет асимптотически устойчивым.

Здесь s – минимальное число такое, что $\text{rank} K_{s-1} = \text{rank} K_s$.

Пример. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_1(kh) - 2x_2(kh) + \\ &\quad + 4x_3(kh), \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + x_2 + x_1(kh) + 3x_3(kh), \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_1(kh) + x_2(kh) - \\ &\quad - x_3(kh), \end{aligned} \quad (11)$$

или в переменных y, z

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 + z_1 - 2z_2 + y_1(kh) - 2z_1(kh) + \\ &\quad + 4z_2(kh), \\ \dot{z}_1 &= 4y_1 + z_1 + y_1(kh) + 3z_2(kh), \\ \dot{z}_2 &= 2y_1 + z_1 - z_2 - 2y_1(kh) + z_1(kh) - z_2(kh), \end{aligned}$$

Вспомогательная переменная в соответствии с (5) имеет вид $\mu_1 = z_1 - 2z_2$, а μ -систему составят уравнения

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 + \mu_1 + y_1(kh) - 2\mu_1(kh), \\ \dot{\mu}_1 &= -\mu_1 + 5y_1(kh) - 2\mu_1(kh). \end{aligned} \quad (12)$$

К этой же системе можно прийти с помощью преобразования (10), где

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad L_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $L_4 A L_3 + L_4 B K L_3$ системы (12) имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями, следовательно, нулевое решение μ -системы асимптотически устойчиво по Ляпунову [2, с. 100]. Это значит, что движение $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ исходной системы (11) асимптотически устойчиво по y_1 , хотя оно не устойчиво по Ляпунову по всем переменным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных / В. И. Воротников. – М. : Наука, 1991. – 288 с.
2. Зубов В. И. Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М. : Наука, 1975. – 495 с.

Поступила 19.11.10.

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ СТЕПЕНЕЙ И РАДИКАЛОВ

К. Н. Шихаев

Разрабатываются теоретические и практические аспекты числовых рядов степеней и радикалов.

1. Беспредельно растущая матрица разностей второго порядка.

Для создания беспредельно растущей матрицы разностей второго порядка, была получена формула исчисления разностей второго порядка (минус первую разность), которая имеет следующий вид:

$$\Delta^2(x^k) = 2 \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \frac{h^{2k}}{(2k)!} (x^k)^{(2k)}, \quad (1)$$

где k – любое целое положительное число.

Формула (1) (конечный полином) получена разложением центральной разности второго порядка: $\Delta^2(x^k) = (x+h)^k + (x-h)^k - 2x^k$ (классика теории конечных разностей) в ряд Тейлора, что позволяет считать ее справедливой для любых целых чисел и любого целого положительного показателя степени – числа k .

Формула (1) дает беспредельно растущую матрицу разностей второго порядка (матрица 1).

Беспредельный рост размерности матрицы разностей второго порядка. Рост матрицы разностей второго порядка до беспредельной размерности обеспечивает оператор роста, который также имеет вид матрицы:

– *Оператор беспредельного роста матрицы разностей второго порядка.*

Матрица 2 построена по принципу арифметического квадрата – прекрасного произведения древних математиков.

Правило арифметического квадрата гласит: Искомое число для заполнения любой ячейки арифметического квадрата рав-

но числу, стоящему над искомым числом в ранее заполненной строке, плюс число, стоящее слева от искомого числа в заполняемой строке.

Для того чтобы сэкономить пространство страницы для размещения членов матрицы, все ее числа поделены на число 2, что следует учитывать при получении ее новых строк.

1) *Рост матрицы 1 на основе матрицы 2.*

Матрица 1 начиная с пятой строки (после вычислений по формуле (1)) была получена с использованием матрицы 2. Это происходило следующим образом:

– *получение $\Delta^2(x^5)$ строки матрицы 1.*

Проводим диагональ по ячейкам матрицы 2 от начала строки $\Delta^2(x^5)$ до ячейки x^5 первой строки и выписываем числа, стоящие на пересечении диагонали с заштрихованными ячейками, вместе с переменными, стоящими в столбцах над этими числами. Получаем:

$$\Delta^2(x^5) = 2(5x^1 + 10x^3) = 10x + 20x^3;$$

– *получение $\Delta^2(x^6)$ строки матрицы 1.*

Проводим диагональ по ячейкам матрицы 2 от начала строки $\Delta^2(x^6)$ до ячейки x^6 первой строки и выписываем числа, стоящие в заштрихованных ячейках, вместе с переменными, стоящими в столбцах над этими числами. Получаем:

$$\Delta^2(x^6) = 2(1 + 15x^2 + 15x^4) = 2 + 30x^2 + 30x^4$$

Далее все аналогично, до строки $\Delta^2(x^{10})$ матрицы 2, где она закончилась. Необходимо ее рост.

© К. Н. Шихаев, 2010

ВЕСТНИК Мордовского университета | 2010 | № 4

x^k	1	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	...
$\Delta^2(x^k)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\Delta^2(x^2)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	...
$\Delta^2(x^3)$	1	4	10	20	35	56	84	120	165	210	...
$\Delta^2(x^4)$	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	...
$\Delta^2(x^5)$	1	6	21	56	126	252	462	792	1284	2002	...
$\Delta^2(x^6)$	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	...
$\Delta^2(x^7)$	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6735	11746	...
$\Delta^2(x^8)$	1	9	45	165	495	1287	3003	6735	13470	25210	...
$\Delta^2(x^9)$	1	10	55	220	715	2002	5005	11740	25210	50420	...
$\Delta^2(x^{10})$	1	11	66	286	1001	3003	8008	19784	49578	95378	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

2) Рост матрицы 2.

Для роста матрицы 2 в ней есть все необходимое. Две первые строки матрицы 2 имеют неограниченный рост, как перечисление чисел натурального ряда. Два первых столбца матрицы 2 (столбец $\Delta^2(x^k)$ и столбец единиц) также имеют неограниченный рост.

Две первых строки и два первых столбца заключают в своем «створе» два вида строк, которые реализуют принцип арифметического квадрата. Заштрихованные ячейки дают рабочие числа, а светлые ячейки обеспечива-

ют беспредельный рост матрицы 2. Согласно этим свойствам матрица 2 получает беспредельный рост, ограниченный только временем и читаемым носителем информация.

– «Рост матрицы 2 вправо». Для того чтобы обеспечить «рост матрицы 2 вправо» (в данном случае до получения в первой строке символа x^{13}), следует продолжить заполнение четырех первых строк, как это показано на части матрицы с названием «рост матрицы 2 вправо».

«Рост матрицы 2 вправо»

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow x^9 & x^{10} & & x^{11} & & x^{12} & x^{13} \rightarrow \\
 \rightarrow 10 & 11 & & 12 & & 13 & \rightarrow \\
 \rightarrow 55 & 55 + 11 = 66 & & 66 + 12 = 78 & & \rightarrow & \\
 \rightarrow 210 & 210 + 66 = 276 & & \rightarrow & & &
 \end{array}$$

– «Рост матрицы 2 вниз». Для того чтобы обеспечить «рост матрицы 2 вниз» (в данном случае до получения строки $\Delta^2(x^{13})$), следует продолжить запол-

нение четырех дополнительных строк матрицы 2, как это показано на части матрицы с названием «рост матрицы 2 вниз».

«Рост матрицы 2 вниз»

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Delta^2(x^{10}) & 1 & 11 & & 66 & & 286 \rightarrow \\
 \Delta^2(x^{11}) & 1 & 1 + 11 = 12 & & 12 + 66 = 78 & & \rightarrow \\
 \Delta^2(x^{12}) & 1 & 1 + 12 = 13 & & \rightarrow & & \\
 \Delta^2(x^{13}) & 1 & \rightarrow & & & &
 \end{array}$$

3) *Дальнейший рост матрицы 1 на основе матрицы 2.* Используя числа, полученные при росте матрицы 2 «выражо» и «выиз», проводим диагональ от конца новой ячейки $\Delta^2(x^{11})$ до ячейки x^{11}

в первой строке матрицы 2. Выбираем числа, стоящие в заштрихованных ячейках матрицы 2 вместе с переменными, стоящими в столбцах над этими числами. Получаем:

$$\Delta^2(x^{11}) = 2(11x + 165x^3 + 462x^5 + 330x^7 + 55x^9) = 22x + 330x^3 + 924x^5 + 660x^7 + 110x^9$$

Аналогично для $\Delta^2(x^{12})$:

$$\Delta^2(x^{12}) = 2(1 - 66x^2 + 495x^4 + 924x^6 + 495x^8 + 66x^{10}) = 1 + 132x^2 + 990x^4 + 1848x^6 + 990x^8 + 132x^{10}$$

$$\Delta^2(x^{13}) = 2(13x \text{ число из «роста матрицы 2 вниз»} + 2(286x^3 + 1287x^5 + 1716x^7 + 715x^9 \text{ числа из матрицы 2}) + 2(78x^{11} \text{ число из «роста матрицы 2 вправо»}),$$

Умножая все полученные числа на число 2, получим:

$$\Delta^2(x^{13}) = 26x + 572x^3 + 2574x^5 + 3432x^7 + 1430x^9 + 156x^{11}$$

Проверяем сумму всех коэффициентов второй разности $\Delta^2(x^{13})$, которая должна быть равной числу $2^{13} - 2 = (8192 - 2) = 8190$, что подтверждает верность коэффициентов матрицы 1, полученных способом роста матрицы 2. Дальнейший рост матрицы 1 происходит аналогично до вперед заданной или (при внесении соответствующих обобщений) до беспредельной размерности.

2. Разложения целочисленной степени в числовые ряды.

Числовые ряды. Для разложения целочисленной степени будут использоваться числовые ряды линейного и треугольного суммирования переменных в членах разностей второго порядка (в членах матрицы 1).

1) *Числовые ряды линейного суммирования переменных в членах разности второго*

порядка. Числовые ряды линейного суммирования переменных имеют следующий вид и обозначение:

$$\sum_{i=0}^{x_0=(x-1)} x_i = (1^V + 2^V + 3^V + \dots + (x-1)^V) = L_L(V=k_c)(x_0=x-1), \quad (2)$$

где символ L обозначает *линейное суммирование*, а символ V обозначает *степени чисел, подлежащих суммированию*.

2) *Числовые ряды треугольного суммирования переменных в членах разности второго порядка.* Числовые ряды имеют следующий вид и обозначение треугольного суммирования переменных:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} + 1^V + 2^V + 3^V + \dots + (x-1)^V + \\ + 1^V + 2^V + \dots + (x-2)^V + \\ + 1^V + 2^V + \dots + (x-3)^V + \\ + 1^V + \dots + \\ + 1^V \end{array} \end{array} = L_T(V=k_c)(x_0=x-1), \quad (3)$$

Здесь символ T означает *треугольное суммирование переменных*, а символ V обозначает *степень суммируемых чисел*. Все числовые ряды линейного и треугольного суммирования могут иметься по степени, в кото-

рой представлены суммируемые числа. Беспредельно растущая матрица разностей второго порядка (матрица 1) является основой, которая дает возможность получать на ее основе рабочие выражения первой разности

$x^k = x$, а следовательно, и целочисленной степени x^k в числовых рядах.

3. Практика разложения целочисленной степени в числовые ряды.

Практика разложения целочисленной степени в числовые ряды обеспечивает получение первой разности $(x^k - x)$ по классике: «первая разность есть сумма вторых разностей».

— Предположим, что для нашей задачи необходимо разложить в числовые ряды целое число x^9 . Для выражения числа x^9 числовыми рядами, следует взять строку первой матрицы $\Delta^2(x^9)$ и переписать ее в следующем виде:

$$(x^9 - x) = 18L_{T,V=1(x-1)} + 168L_{T,V=2(x-1)} + 252L_{T,V=3(x-1)} + 72L_{T,V=4(x-1)}.$$

Затем вычисляем треугольные суммы T и умножаем их на свои коэффициенты.

$$\begin{aligned} 3^{11} = 177147 &= 3 + 22(L_{T,V=1(2)} = \sqrt[3]{\frac{1^3+2^3}{+1}} = 22 \cdot 4) = 88 + 330(L_{T,V=2(2)} = \sqrt[3]{\frac{1^3+2^3}{+1^3}} = \\ &= 330 \cdot 10) = 3300 + 924(L_{T,V=3(2)} = \sqrt[3]{\frac{1^3+2^3}{+1^3}} = 924 \cdot 34) = 31416 + 660(L_{T,V=4(2)} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{1^3+2^3}{+1^3}} = 660 \cdot 130) = 85800 + 110(L_{T,V=5(2)} = \sqrt[3]{\frac{1^3+2^3}{+1^3}} = 110 \cdot 514) = \\ &= 56540 = 3 + 88 + 3300 + 31416 + 85800 + 56540 = 177147. \end{aligned}$$

При этом сумма всех коэффициентов получила свое значение:

$$22 + 330 + 924 + 660 + 110 = 2046 = (2^{11} = 2048 - 2).$$

И так для любого целого числа x и любого (четного и нечетного, в том числе абсолютно простого) показателя степени k — ряда натуральных чисел получаем сравнения.

4. Сравнения. Для использования сравнений A^k в решении конкретных уравнений, их следует разделить по четности-нечетности показателей степени: $A_{\text{четн.}}^{k_1}$ и $A_{\text{нечетн.}}^{k_2}$.

Разделение общего сравнения $A^k = 2^k - 2$ на сравнения для четных и нечетных показателей степени при $n > 3$ основано на следующем факте: при четном показателе степени первые два члена правой части разложения дают число x^2 : $x + 2L_{T,V=1(x_0=x-1)} = x^2$. При этом коэффициент (теперь первого) члена ряда уменьшается на число 2. При нечет-

Замечание. При нечетных показателях степени числовые ряды линейного суммирования участия не принимают.

Пример: $k = 9$, $x = 2$

$$\begin{aligned} x^9 &= (x - 2) + (18 + 168 + 252 + 72 = \\ &= 2^9 - 2 = 510) = 512; x = \pm \sqrt[9]{512} = \pm 2. \end{aligned}$$

В этом примере при $x = 2$ все треугольные суммы, взятые при $x_0 = x - 1 = 1$, стали равными единице, а сумма всех коэффициентов, равная числу A^9 , получила свое значение: $A^9 = (29 - 2) = 510 + (x - 2) = 512$.

Пример: $k = 11$, $x = 3$. Возьмем строку $\Delta^2(x^{11})$ матрицы 1 и просуммируем переменную $x = 3$ во всех ее членах (количество которых $[13/2] = 5$) по правилу треугольника. Получим:

ном показателе степени первые два члена правой части разложения дают число x^3 : $x + 6L_{T,V=1(x_0=x-1)} = x^3$. При этом коэффициент (теперь первого) члена ряда уменьшается на число 6. Покажем это разделение на примерах.

Пример для четных k , $k = 4$, $x = 3$:

$$\begin{aligned} 3^4 &= 81 = (x^2 = 9) + A_{\text{четн.}}^4 = 2^4 - 2^2 = \\ &= 12(L_{T,V=2(x_0=3-1=2)} = 6) = \\ &= 12 \cdot 6 = 72 = 9 + 72 = 81. \end{aligned}$$

Пример для нечетных k , $k = 5$, $x = 4$:
 $x^5 = x^3 + (2k = 10 - 6 = 4)L_{T,V=1(x_0=x-1)} + 20L_{T,V=2(x_0=x-1)} = 4^5 = 1024 = 4^3 = 64 + 4 \cdot 10 = 40 +$

$$+ 20(l_{T,V-3}, (x_0=4-1-3) = 46 = 20 \cdot 46 = \\ = 920) = 64 + 40 - 920 = 1024.$$

5. Решение некоторых задач со сравнениями A^{ki} . Для примеров возьмем уравнения аддитивной теории чисел. Уравнения аддитивной теории чисел считаются сложными, а в теории чисел (в составе Диофантовых уравнений) наиболее представительными.

В данной работе делается попытка упростить решения аддитивных уравнений, используя сравнения A^{ki} , которое дает все необходимые условия их целочисленной разрешимости. Возьмем уравнения аддитивной теории чисел для целых, взаимно простых чисел x , y и z , предварительно умножив их на сравнения A^{ki} : $A^2(x^2 + y^2 - z^2 = 0)$; $A^3(x^3 + y^3 - z^3 = 0)$; $A^4(x^4 + y^4 - z^4 = 0)$; ... $A^k(x^k + y^k - z^k = 0)$, где k натуральное число, растущее в бесконечность. Если предположить, что все выше приведенные аддитивные уравнения получили целочисленные решения, то получим необходимые условия их целочисленной разрешимости: $A^2 = 0$; $A^3 = 0$; $A^4 = 0$, ..., $A^k = 0$. Раскрывая эти необходимые условия, получим уравнения: $A^2 = 0$ дает уравнения: $2^2 = 2$; $4 - 2 = 2$; $k = 2$ или $2 = 1$, чего не может быть. $A^3 = 0$ дает уравнение $2^3 = 2$, чего не может быть. $A^4 = 0$ дает уравнения: $2^4 = 2^2$, которое имеет решения: $2^4 = 2^4$ или $2^2 = 2^2$; $k = 4$ условие задачи. Принимаем: $k = 2$. Или $2^1 = 1$, чего не может быть. И так для любых целых взаимно простых чисел x , y , z и любых показателей степени, целых положительных чисел k , аддитивные уравнения теории чисел могут иметь целочисленные решения, только в одном случае – при $k = 2$.

Остается один вопрос. Если брать общее сравнение $A^n = 0$, $2^n = 2$, то все выше рассмотренные аддитивные уравнения получают необходимое условие их целочисленной разрешимости: $2^1 = 2^1$, $k = 1$ или $2^{k-1} = 1$, чего не может быть при $k > 2$. Но классика теории чисел говорит о том, что все аддитивные уравнения, если и могут иметь целочисленные решения, то только во взаимно простых числах. Это в свою очередь говорит о том, что при $k = 1$ уравнение первой степени

не имеет целочисленных решений: $x + y \neq z$, $x + y - z = 2k$. В определенных ситуациях автор склонен использовать решение $k = 1$, с припиской «в соответствующих числах».

Естественно, что автору данной работы будет задан вопрос о Ферма и его теореме. Пьер Ферма – талантливый математик и гениальный юрист. Он смог так поставить задачу, что тысячи любознательных умов всех стран мира посколько веков «...посещают его всемирный университет». Ферма очень много сделал для математики. Что касается его теоремы, то Ферма оставил нам только текст: «...невозможно разложить куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и, в общем случае, любую степень, большую двух, в сумму таких же степеней». Этот текст может быть принят по-разному. Например:

– первая фраза: «Невозможно разложить куб на два куба...». Это задача удвоения куба, которую решали софисты в V веке до н. э.: $2x^3 = z^3$;

– вторая фраза: «...биквадрат на два биквадрата...». Это задача удвоения биквадрата: $2x^4 = z^4$

– третья фраза: «...и в общем случае любую степень, большую двух, в сумму таких же степеней». В результате получаем уравнение, которое Ферма не мог не решить: $2x^k = z^k$. В тексте Ферма есть «намек» на третью переменную, который заключен в словах: «...большую двух». Эти два слова можно принять как «загадка Ферма». Но при этом теореме Ферма не следует «трогаться», поскольку она касается не только уравнений (одного или другого, а возможно и третьего). Это «тренажер» ума и интеллекта людей самых различных возрастов, взглядов и профессий, безвозмездно и добровольно обучающихся в его «всемирном университете». Кстати, уравнение $2x^2 = z^2$ которое наследует самое великое достижение пифагорейцев – закон несоизмеримости катета и гипотенузы прямоугольного равнобедренного треугольника, по моему убеждению, таит в себе большие возможности раскрытия проблем теории чисел.

Поступила 11.10.10.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН В СЛОЕ ЖИДКОГО ДИЭЛЕКТРИКА НА ПОРИСТОМ ОСНОВАНИИ

Н. Г. Тактаров, С. М. Миронова

Рассматривается распространение волн на поверхности жидкого диэлектрика с постоянной диэлектрической проницаемостью, находящегося на слое диэлектрической пористой среды, насыщенной жидкостью.

Система координат выбрана так, что ось z направлена вертикально вверх, против вектора $\vec{g}$ – ускорения свободного падения; $z = -h_1$ – твердая поверхность, ограничивающая снизу пористый слой ($-h_1 \leq z \leq 0$); $z = 0$ – поверхность раздела пористого слоя и свободной жидкости; $z = h_2$ – невозмущенная свободная поверхность слоя жидкости, занимающей область $0 \leq z \leq h_2$. Над поверхностью жидкости находится среда пренебрежимо малой плотности (атмосфера). Номерами 1, 2, 3 обозначаются величины, относящиеся к пористой среде, свободной жидкости и атмосфере соответственно. Приложенное однородное электрическое поле имеет произвольное направление. В результате распространения волн поле перестает быть однородным: появляется возмущение электрического поля. Предполагается, что в диэлектрике отсутствуют свободные электрические заряды.

Система уравнений движения жидкости в областях 1 и 2, а также для электрического поля в областях 1, 2, 3 имеет вид [2–4]:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{\rho}{\Gamma} \cdot \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\text{grad} p_1 + \rho \vec{g} - \frac{\eta}{K} \cdot \vec{u}_1, \\ & \text{div} \vec{u}_1 = 0; \\ 2. \quad & \rho \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} = -\text{grad} p_2 + \rho \vec{g}, \\ & \text{div} \vec{u}_2 = 0; \\ 3. \quad & \text{rot} \vec{E}_i = 0, \quad \text{div} \epsilon_i \vec{E}_i = 0 \\ & (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность жидкости; Γ – пористость; $\vec{u}_1$ – макроскопическая скорость фильтрации; $\vec{u}_2$ – скорость свободной жидкости; p_1, p_2 – давление; η – вязкость; K – коэффициент проницаемости; $\vec{E}_i$ – напряженность электрического поля; ϵ_i – диэлектрические проницаемости, предполагаемые постоянными. Система граничных условий на поверхностях раздела [2–4]:

$$\begin{aligned} 1. \quad & u_{1z} = 0 \quad (z = -h_1); \\ 2. \quad & \vec{E}_{3w} = 0 \quad (z = -h_1); \\ 3. \quad & u_{1z} = u_{2z} \quad (z = 0); \\ 4. \quad & \vec{E}_{1r} = \vec{E}_{2r} \quad (z = 0); \\ 5. \quad & \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \quad (z = 0); \\ 6. \quad & p_1 - \frac{\epsilon_1}{4\pi} E_{1n}^2 + \frac{\epsilon_1}{8\pi} \vec{E}_1^2 = p_2 - \frac{\epsilon_2}{4\pi} E_{2n}^2 + \\ & - \frac{\epsilon_2}{8\pi} \vec{E}_2^2, \quad (z = 0); \\ 7. \quad & u_{2z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (z = h_2 + \xi); \\ 8. \quad & \vec{E}_{2r} = \vec{E}_{3r} \quad (z = h_2 + \xi); \\ 9. \quad & \epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_3 E_{3n} \quad (z = h_2 + \xi); \\ 10. \quad & p_2 - \frac{\epsilon_2}{4\pi} E_{2n}^2 + \frac{\epsilon_2}{8\pi} \vec{E}_2^2 = p_3 + \\ & + \frac{\epsilon_3}{4\pi} E_{3n}^2 - \frac{\epsilon_3}{8\pi} \vec{E}_3^2 = -\alpha \Delta_2 \xi \quad (z = h_2 + \xi); \end{aligned}$$

© Н. Г. Тактаров, С. М. Миронова, 2010

$$11. \bar{E}_{3w} = 0 \quad (z \rightarrow \infty).$$

Здесь $\bar{E}_i = \bar{E}_{i0} + \bar{E}_{iw}$, $\bar{E}_{i0}$ – невозмущенное поле; $\bar{E}_{iw}$ – возмущение поля; $z = h_2 + \xi(x, y, t)$ – свободная возмущенная поверхность жидкости; $E_{in} = \bar{E}_i$, n , $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности, направленный из области 2 в 3; индекс τ означает касательную к поверхности составляющую вектора; α – коэффициент поверхностного натяжения; $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; $p_2 = p_{atm} = \text{const}$.

Из уравнений (1) следует: $\bar{E}_i = -\nabla\psi_i = -\nabla\psi_{i0} - \nabla\psi_{iw}$, $\bar{u}_2 = \nabla\varphi$. Записывая давление в виде $p_i = p_{i0} + p_{iw}$ ($i = 1, 2$) и учитывая, что в линейном приближении $\bar{n} = -\frac{\partial\xi}{\partial x}\bar{e}_1 - \frac{\partial\xi}{\partial y}\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, где $\bar{e}_i$ – единичные базисные векторы, перепишем граничные условия (2) в виде:

$$\begin{aligned} 1. & u_{1z} = 0 \quad (z = -h_1); \\ 2. & \psi_{1w} = 0 \quad (z = -h_1); \\ 3. & u_{1z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (z = 0); \\ 4. & \psi_{1w} = \psi_{2w} \quad (z = 0); \\ 5. & \varepsilon_1 \frac{\partial\psi_{1w}}{\partial z} = \varepsilon_2 \frac{\partial\psi_{2w}}{\partial z} \quad (z = 0); \\ 6. & p_{1w} + \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \left(-\bar{E}_{01} \cdot \nabla\psi_{1w} + 2E_{01z} \frac{\partial\psi_{1w}}{\partial z} \right) = \\ & = p_{2w} + \frac{\varepsilon_2}{4\pi} \left(-\bar{E}_{02} \cdot \nabla\psi_{2w} + 2E_{02z} \frac{\partial\psi_{2w}}{\partial z} \right) \\ & (z = 0); \\ 7. & \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\xi}{\partial t} \quad (z = h_2); \\ 8. & E_{02z} \cdot \xi - \psi_{2w} = E_{03w} \cdot \xi - \psi_{3w} \quad (z = h_2); \\ 9. & \varepsilon_2 \left(\bar{E}_{02} \cdot \nabla_2 \xi + \frac{\partial\psi_{2w}}{\partial z} \right) = \varepsilon_3 \left(\bar{E}_{03} \cdot \nabla_2 \xi + \right. \\ & \left. + \frac{\partial\psi_{3w}}{\partial z} \right) \quad (z = h_2); \\ 10. & p_{2w} + \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \left(-\bar{E}_{01} \cdot \nabla\psi_{2w} + 2E_{02z} \frac{\partial\psi_{2w}}{\partial z} \right) + \end{aligned} \quad (3)$$

$$+ \frac{\varepsilon_3}{4\pi} \left(\bar{E}_{03} \cdot \nabla\psi_{3w} + 2E_{03z} \frac{\partial\psi_{3w}}{\partial z} \right) = -\alpha \nabla_2 \xi \quad (z = h_2);$$

$$11. \psi_{3w} = 0 \quad (z \rightarrow \infty).$$

Здесь $\nabla_2 \xi = \bar{e}_1 \frac{\partial\xi}{\partial x} + \bar{e}_2 \frac{\partial\xi}{\partial y}$; $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$; $\psi_{iw} = \psi_{iw}(x, y, z, t)$; $P_{3w} = 0$.

Первые четыре уравнения (1) принимают для возмущений вид:

$$\begin{aligned} 1. & \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_{1w} + \rho \bar{g} - \frac{\eta}{K} \bar{u}_1; \\ 2. & \text{div} \bar{u}_1 = 0; \\ 3. & \rho \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} = -\nabla p_2 + \rho \bar{g}; \\ 4. & \text{div} \bar{u}_2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом равенств $\bar{u}_2 = \nabla\varphi$, $\bar{E}_{iw} = -\Delta\psi_{iw}$ система (1) записывается в виде:

$$\begin{aligned} 1. & \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{1z} = -\frac{\eta}{K} \Delta \bar{u}_{1z}; \\ 2. & \Delta \varphi = 0; \\ 3. & \Delta \psi_{iw} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (5)$$

Для исключения давления P_{1w} из уравнения 6) в граничных условиях (3) при помощи уравнения 1) системы (4) запишем:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \bar{u}_{1z}}{\partial t} &= -\frac{\partial P_{1w}}{\partial x} - \frac{\eta}{K} \bar{u}_{1z}, \\ \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \bar{u}_{1y}}{\partial t} &= -\frac{\partial P_{1w}}{\partial y} - \frac{\eta}{K} \bar{u}_{1y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из уравнения непрерывности $\text{div} \bar{u}_1 = 0$ следует

$$\frac{\partial u_{1z}}{\partial z} = -\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} - \frac{\partial u_{1y}}{\partial y}. \quad (7)$$

Продифференцируем первое и второе уравнения (6) по x и y соответственно; сложим полученные равенства и при помощи (7) получим соотношение

$$\begin{aligned} \Delta_2 P_{1w} &= \frac{\partial^2 P_{1w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_{1w}}{\partial y^2} = \\ &= \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial t \partial z} + \frac{\eta}{K} \frac{\partial u_{1z}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично из уравнений 3) и 4) системы (4) следует:

$$\Delta_2 P_{2m} = \rho \frac{\partial^2 u_{2z}}{\partial t \partial z}. \quad (9)$$

Применяя к обеим частям равенства 6) в системе (3) оператор $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ и используя затем равенства (8) и (9) вместо равенства 6), получим другое равенство 6'), в котором отсутствуют P_{1z} и P_{2z} . Для исключения P_{2z} и ξ из равенства 10) системы (3), подставим в (3) выражение

$$P_{2z} = -\rho g \xi - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

а затем продифференцируем равенство 10) по t с учетом $u_{2z} = \partial \xi / \partial t$ и $u_{2z} = \partial \varphi / \partial z$. В результате вместо 10) получим равенство 10'), в котором отсутствуют P_{2z} и ξ .

Для исключения ξ из равенства 8) в системе (3) следует продифференцировать по t обе части этого равенства и использовать соотношение $u_{2z} = \partial \xi / \partial t$. В результате получим равенство 8').

Чтобы исключить ξ из равенства 9) системы (3), это равенство дифференцируем по t и используем затем $u_{2z} = \partial \xi / \partial t$. В результате получим равенство 9').

Решение системы уравнений (5) ищем в виде бегущих затухающих волн

$$\begin{aligned} u_{1z}(x, y, z, t) &= U(z) \exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)]; \\ \varphi(x, y, z, t) &= \Phi(z) \exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)]; \quad (10) \\ \psi_{iz}(x, y, z, t) &= \Psi_i(z) \exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)]. \end{aligned}$$

Здесь U, Φ, Ψ_i — амплитуды; k_1, k_2 — компоненты волнового вектора $\vec{k} = k_1 \vec{e}_1 + k_2 \vec{e}_2$; $i = 1, 2, 3$; $\gamma = Re(\gamma) + i Im(\gamma)$; $\beta = Re(\gamma)$ — коэффициент затухания колебаний волны ($\beta \geq 0$); $\omega = |Im(\gamma)|$ — частота колебаний волны.

Подставляя выражения (10) в уравнения (5), получим систему пяти линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка для нахождения пяти амплитуд U, Φ, Ψ_i . Решения этих уравнений имеют вид:

$$\begin{aligned} U(z) &= C_1 \exp(-kz) + C_2 \exp(kz); \\ \Phi(z) &= C_3 \exp(-kz) + C_4 \exp(kz); \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_i(z) &= C_{i+j} \exp(-kz) + \\ &+ C_{i+j+1} \exp(kz). \end{aligned}$$

Здесь $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ — волновое число, $i = 1, 2, 3$; $j = 4, 5, 6$; C_n ($n = 1, 2, \dots, 10$) — произвольные постоянные, для нахождения которых подставляем выражения (11) в десять граничных условий: 1), 2), 3), 4), 5), 6'), 8'), 9'), 10'), 11). В результате будем иметь однородную систему десяти линейных относительно C_n алгебраических уравнений, которая имеет ненулевые решения только при равенстве нулю определителя системы, составленного из коэффициентов при C_n .

В связи с громоздкостью вычислений ограничимся далее случаем чисто поперечного приложенного электрического поля, т. е. $E_{00z} \neq 0$, $E_{0iz} = E_{0iy} = 0$ ($i = 1, 2, 3$), а также будем предполагать, что слой пористой среды имеет бесконечную толщину ($h_1 \rightarrow +\infty$).

Седьмое граничное условие (3) используем для нахождения профиля волны:

$$\xi(x, y, t) = \int \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t} \Big|_{z=h_2} dt.$$

Приравнявая к нулю определитель выше-названной системы, получим дисперсионное уравнение для поверхностных волн, связывающее между собой величины γ и k :

$$\begin{aligned} &\frac{\rho^2 L}{g} \left(a_1 - \frac{a_2}{\Gamma} \gamma^2 \right) + \frac{\rho \eta L}{dK} a_2 \gamma^2 + \\ &+ \rho \gamma k \left[\left(\frac{a_1}{\Gamma} - a_2 \right) N + Q \right] - \frac{\eta k}{K} N a_1 = 0; \quad (12) \end{aligned}$$

$$L = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \exp(2kh_2) +$$

$$+ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3),$$

$$M = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) [\exp(2kh_2) + 1],$$

$$N = \left(\rho + \frac{\alpha k^2}{g} \right) L - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{4\pi g} (E_{02z} - E_{03z})^2 M,$$

$$Q = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{2\pi g} (E_{01z} - E_{02z}) \times$$

$$\times (E_{02z} - E_{03z})(a_2 - a_1),$$

$$a_1 = 1 - \exp(2kh_2),$$

$$a_2 = 1 + \exp(2kh_2).$$

Зависимость величин β и ω от волнового числа k и от других параметров рассматривается на примере жидкого диэлектрика бензола, для которого при температуре 20 °С: $\rho = 0,879$ г/см³; $\alpha = 29,0$ дин/см; $\varepsilon_2 = 2,29$; $\eta = 0,00648$ г/см · с. Пористая среда моделируется совокупностью стеклянных шариков с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_4 = 5$. Величина ε_1 находится по формуле $\varepsilon_1 = \Gamma \cdot \varepsilon_2 + (1 - \Gamma)\varepsilon_4$; для воздуха принимаем $\varepsilon_3 = 1$. Коэффициент проницаемости K пористой среды в формуле (2) находится по формуле Коуши [1]:

$$K = \frac{\Gamma^3}{150(1 - \Gamma)^2} d^2,$$

где d (см) – диаметр шариков.

Напряженность электрического поля измерялась в единицах СГС (1 ед. СГС = 300 В/см). Значения E выбирались такими, чтобы они не превышали напряженность пробоя в воздухе (это около 80 ед. СГС = 24 000 В/см).

Расчеты показывают, что при каждом фиксированном значении волнового числа k и значения E_3 величина β возрастает с ростом пористости Γ ; с ростом k крутизна графика этой зависимости уменьшается.

При каждой фиксированной толщине слоя h_2 и значении E_3 , при увеличении k значения β вначале возрастают, а затем, по достижении максимума, убывают. Чем меньше h_2 , тем круче график зависимости $\beta(k)$ на участке роста. При увеличении температуры от 10 до 50 °С точка максимума графика $\beta(k)$ поднимается.

При увеличении E_3 частота ω убывает при фиксированных h_2 и k . С ростом Γ частота ω возрастает при фиксированных h_2 , k и E_3 .

Функция $\beta(\sigma)$, где $\sigma = h_2/\lambda$ (λ – длина волны), при увеличении σ вначале возрастает, а по достижении максимума – убывает. При увеличении h_2 точка максимума опускается.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гершуни Г. Э. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. Э. Гершуни, Е. М. Жуковичский – М. : Наука, 1972. – 392 с.
2. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1982. – 624 с.
3. Ландау Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1986. – 736 с.
4. Столяров И. В. Распространение поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании / И. В. Столяров, Н. Г. Тахтаров // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1987. – № 5. – С. 183–186.

Поступила 27.09.10.

АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

С. А. Федосин, Д. А. Ладяев, О. А. Марьина

В статье автор рассматривает подход к моделированию композиционных материалов с использованием нейросетевых технологий и анализирует различные методы обучения нейронных сетей. В качестве нового подхода к решению задачи поиска глобального аттрактора функции энергии предлагается применение вейвлет-преобразования.

Введение. Искусственные нейронные сети находят применение при решении сложных задач, когда обычные алгоритмические решения оказываются неэффективными или невозможными. При построении нейронных сетей делается ряд допущений и значительных упрощений, однако, они демонстрируют такие свойства, как обучение на основе опыта, обобщение, извлечение существенных данных из избыточной информации. После анализа входных сигналов нейронные сети самонастраиваются и обучаются, чтобы обеспечить правильную реакцию. Обученная сеть может быть устойчивой к некоторым отклонениям входных данных.

Рассмотрим многослойную полносвязанную нейронную сеть прямого распространения (рис. 1), которая широко используется для поиска закономерностей и классификации образов. Полносвязанной нейронной сетью называется многослойная структура, в которой каждый нейрон произвольного слоя

связан со всеми нейронами предыдущего слоя (нейроны первого слоя соединены со входами нейронной сети). Прямое распространение сигнала означает, что такая нейронная сеть не содержит петель. Математическая модель нейрона описывается выражением (1)

$$x_k^{i+1} = f\left(\sum_{j=1}^N w_j^{(k)} x_j^{(i)}\right), \quad (1)$$

где x – выход нейрона, верхний индекс (i) показывает номер слоя, нижний индекс (k) показывает номер нейрона в слое; N – число нейронов в слое; w – вес синаптической связи; f – функция активации нейрона.

Выход k -го нейрона слоя $i+1$ рассчитывается как взвешенная сумма всех его входов со слоя i , к которой применена функция активации, нормализующая выходной сигнал. Входы нейронов слоя $i+1$ являются выходами нейронов слоя i .

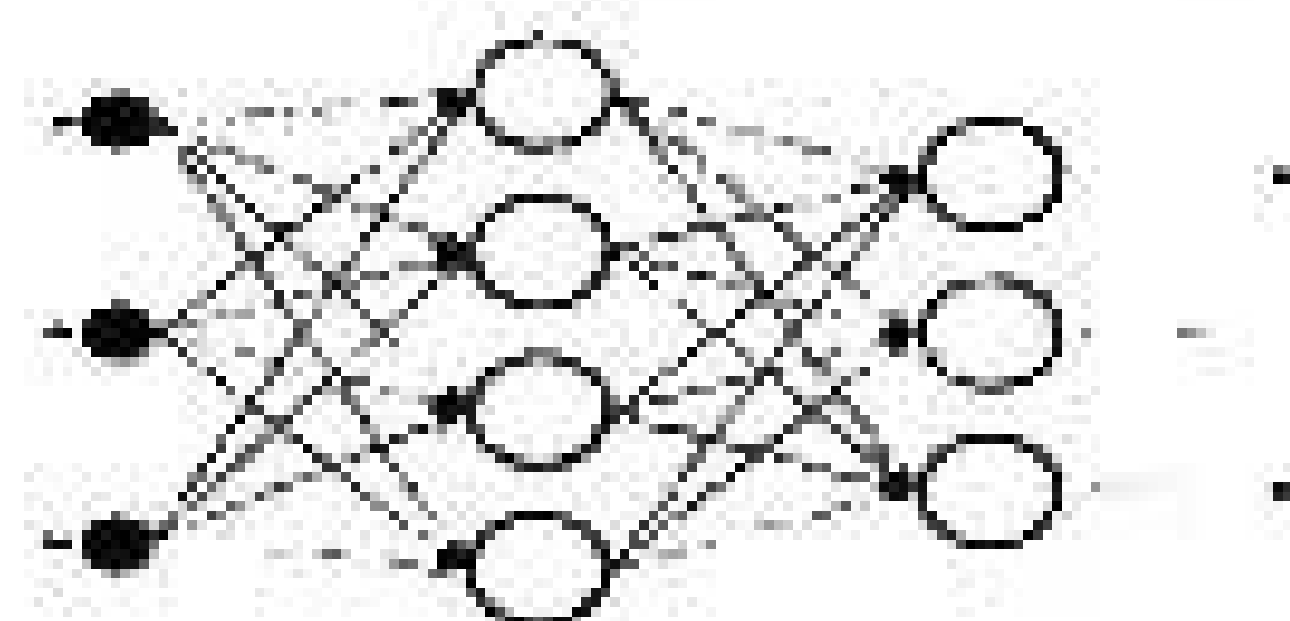


Рис. 1. Пример многослойной полносвязанной нейронной сети прямого распространения сигнала

Целью данной статьи является сравнение градиентных методов обучения нейронных сетей. Ставится вопрос об удешевлении задачи поиска глобального минимума функции энергии с применением теории вейвлет-преобразований.

Рассмотрим понятие и принципы процесса обучения многослойной нейронной сети (многослойного персептрона). Уделим внимание основному методу обучения многослойного персептрона – алгоритму обратного распространения ошибки – и его модификациям. Сравним эти методы обучения, определим достоинства и недостатки, а также предложим иной подход к решению задачи поиска глобального минимума функции энергии.

Обучение [2]. Для нейронных сетей под обучением понимается процесс настройки архитектуры сети (структуры связей между нейронами) и весов синаптических связей (влияющих на сигналы коэффициентов) для эффективного решения поставленной задачи. Обучение нейронной сети осуществляется на

определенной выборке по некоторому алгоритму.

Выделяют три парадигмы обучения: с учителем, без учителя (или самообучение) и смешанная. Среди множества алгоритмов обучения с учителем (когда известны правильные ответы к каждому входному примеру, а веса подстраиваются, чтобы минимизировать ошибку) наиболее успешным является алгоритм обратного распространения ошибки. Его основная идея заключается в том, что изменение весов синапсов происходит с учетом локального градиента функции ошибки. Разница между реальными и правильными ответами нейронной сети, определяемыми на выходном слое, распространяется в обратном направлении (рис. 2) – навстречу потоку сигналов. В итоге каждый нейрон способен определить вклад каждого своего веса в суммарную ошибку сети. Простейшее правило обучения соответствует методу наискорейшего спуска, то есть изменения синаптических весов пропорционально их вкладу в общую ошибку.

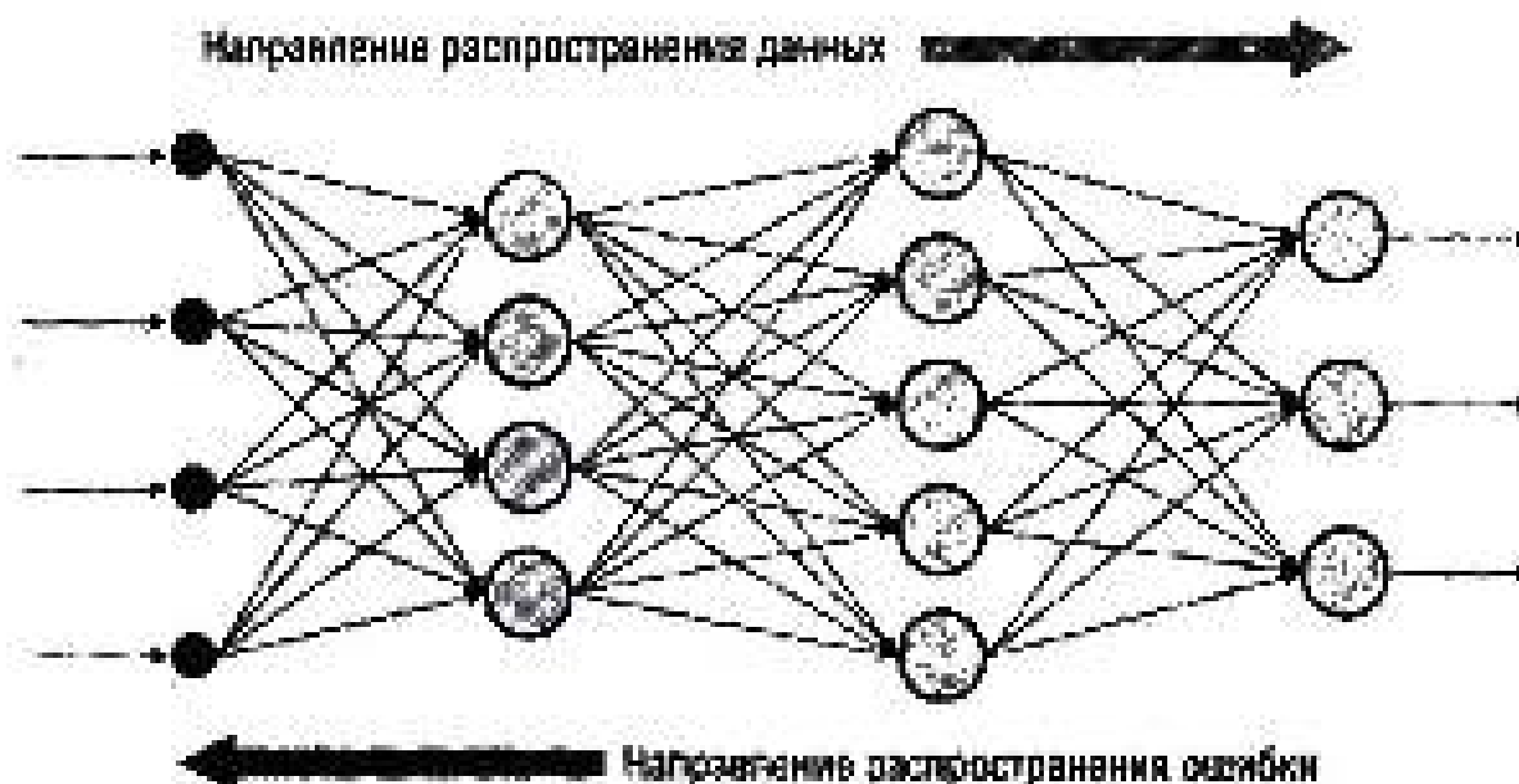


Рис. 2. Метод обратного распространения ошибки для многослойной полносвязанной нейронной сети

На рис. 3 проиллюстрирован метод градиентного спуска. К весовым коэффициентам применяется поправка, которая определяется в соответствии с формулой (2)

$$\Delta w_{ij}^{(n)} = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{ij}^{(n)}}, \quad (2)$$

где

w – коэффициент синаптической связи между нейронами i и j слоя n ;

η – коэффициент скорости обучения сети;

E – функция суммарной ошибки сети.



Рис. 3. Метод градиентного спуска при минимизации ошибки сети

При подобном обучении нейронной сети всегда существует возможность попадания алгоритма в локальный минимум. Для этого используются специальные приемы, позволяющие «выбросить» найденное решение из локального экстремума. Данные методы изложены в работах [1; 3–4; 6–9]. Также одним из вариантов, помогающим в решении задачи определения глобального минимума на поверхности ошибок является сглаживание функции энергии. Показательно объяснить данное предположение на модели Хопфилда, описанной в работе [5].

Метод обратного распространения ошибки [6]. Метод обратного распространения ошибки – это итеративный градиентный алгоритм, который используется с целью минимизации ошибки работы многослойного персептрона и получения желаемого выхода.

Основная идея этого метода состоит в распространении сигналов ошибки от выходов сети к ее входам, в направлении, обратном прямому распространению сигналов в обычном режиме работы. Для возможности применения этого метода передаточная функция нейронов должна быть дифференцируема.

Для каждого узла определяется поправка, и это зависит от слоя, к которому относится узел. Кроме этого, на вход алгоритму нужно подавать структуру сети. Нейронные сети простой структуры (состоящие из двух уровней нейронов: скрытого и выходного) на практике дают хорошие результаты.

Недостатки алгоритма. Больше всего неприятностей приносит неопределенно долгий процесс обучения нейронной сети, при

этом она может и не обучиться вовсе. Причины могут быть следующими:

- *параметры сети.* В процессе обучения сети значения весов могут в результате коррекции стать очень большими величинами. Большинство нейронов будут функционировать в области, где производная сжимающей функции очень мала;

- *локальные минимумы.* Обратное распространение использует разновидность градиентного спуска – спуск вниз по поверхности ошибки, – непрерывно подстраивая веса в направлении к минимуму. Сеть может попасть в локальный минимум, когда рядом имеется гораздо более глубокий минимум;

- *размер шага.* Коррекция весов предполагается бесконечно малыми. Это неосуществимо на практике, так как ведет к бесконечному времени обучения. Однако размер шага должен браться конечным.

Существует возможность переобучения сети. Весь набор образов, предоставленных к обучению, будет выучен сетью, но любые другие образы, даже очень похожие, могут быть классифицированы неверно.

Существуют современные алгоритмы второго порядка, такие как метод сопряженных градиентов и метод Левенберга–Маркварта, которые на многих задачах работают существенно быстрее (иногда на порядок). Разработаны также эвристические модификации этого алгоритма, хорошо работающие для определенных классов задач, – быстрое распространение и Дельта-дельта с чертой.

Метод сопряженных градиентов [3; 7]. Метод сопряженных градиентов – метод

нахождения локального минимума функции на основе информации о ее значениях и ее градиенте. В случае квадратичной функции в R^n минимум находится за n шагов.

Метод сопряженных градиентов является методом первого порядка, в то же время скорость его сходимости квадратична. Этим он выгодно отличается от обычных градиентных методов. При оптимизации функций общего вида метод сопряженных направлений сходится в 4-5 раз быстрее метода наискорейшего спуска. При этом не требуется трудоемких вычислений вторых частных производных в отличие от методов второго порядка.

Метод градиентного спуска с учетом моментов [1]. Идея метода заключается в добавлении к величине коррекции веса значения пропорционального величине предыдущего изменения этого же весового коэффициента. Величина коррекции веса рассчитывается согласно формуле (3)

$$\Delta w(t) = -\eta \frac{\partial E}{\partial w} + \alpha \Delta w(t-1), \quad (3)$$

где $\Delta w(j)$ – значение коррекции веса на j -м шаге; η – длина шага; $E(w)$ – функция ошибки; α – коэффициент инерции.

Быстрое распространение [9]. В методе быстрого распространения, или методе градиентного спуска с адаптивным обучением, производится пакетная обработка данных. Вычисляется усредненный градиент поверхности ошибок по всему обучающему множеству, и веса корректируются один раз в конце каждой эпохи.

Метод быстрого распространения действует в предположении, что поверхность ошибок является локально квадратичной. В этом предположении алгоритм быстрого распространения работает так:

1. На первой эпохе веса корректируются по тому же правилу, что и в методе обратного распространения, исходя из локального градиента и коэффициента скорости обучения.

2. На последующих эпохах алгоритм использует предположение о квадратичности для более быстрого продвижения к точке минимума.

Исходные формулы метода быстрого распространения имеют ряд вычислительных недостатков. Во-первых, если поверхность

ошибок не является вогнутой, алгоритм может уйти в ложном направлении. Далее, если вектор градиента не меняется или меняется мало, шаг алгоритма может оказаться очень большим и даже бесконечным. Наконец, если по ходу встретился нулевой градиент, изменение весов вообще прекратится.

Метод Дельта-дельта с чертой [8]. В некоторых случаях метод Дельта-дельта с чертой, или метод градиентного спуска с учетом моментов и адаптивным обучением, оказывается эффективнее, хотя в большей степени, чем метод обратного распространения, склонен застрекать в локальных минимумах. Метод Дельта-дельта с чертой обычно довольно устойчив в отличие от метода обратного распространения.

В методе Дельта-дельта с чертой скорости обучения для отдельных весов корректируются на каждой эпохе таким образом, чтобы соблюдались следующие важные эвристические требования:

- 1) если производная сохраняет знак на нескольких последовательных итерациях, то скорость обучения увеличивается (поверхность ошибок имеет малую кривизну, поэтому одинаковым продвижениям соответствуют примерно одинаковые понижения уровня);

- 2) если знак производной на протяжении нескольких последних итераций всякий раз менялся на противоположный, то скорость обучения значительно уменьшается (если этого не сделать, алгоритм может начать осциллировать вокруг точек с большой кривизной).

Чтобы удовлетворить этим условиям, в методе Дельта-дельта с чертой задаются:

- начальная скорость обучения, используемая для всех весов на первой эпохе;

- коэффициент ускорения, который добавляется к скорости обучения, когда производные не меняют знака;

- коэффициент замедления, на который умножаются скорости обучения в случае, когда производная меняет знак.

Применение линейного роста и экспоненциального убывания для скоростей обучения придает алгоритму большую устойчивость. Однако описанная схема может плохо рабо-

тать на поверхностях ошибок, искаженных помехами, где при выраженном общем понижающемся рельефе производные могут резко менять знак. Поэтому при реализации алгоритма для увеличения или уменьшения скорости обучения берется усиженный вариант производной.

Веса корректируются по тем же формулам, что и в методе обратного распространения, с той разницей, что коэффициент инерции не используется, а каждый вес имеет свою собственную, зависящую от времени скорость обучения. Изначально всем скоростям обучения присваиваются одинаковые стартовые значения, затем на каждой эпохе они корректируются.

Модель Хопфилда [4]. Модель Дж. Хопфилда представляет собой сеть связанных между собой нейронов, каждый из которых характеризуется своим состоянием уровнем возбуждения x_i . Состояние любого нейрона в каждый момент времени t сигмоидально зависит от взвешенной суммы сигналов, поступающих к нему от других нейронов:

$$x_i(t) = \frac{1 - e^{-\frac{G}{T} \sum_j w_{ij} x_j(t-1)}}{1 + e^{-\frac{G}{T} \sum_j w_{ij} x_j(t-1)}}. \quad (4)$$

Веса w_{ij} характеризуют силу синаптической связи между нейронами. Крутизна сигмоидной кривой, называемой функцией активации нейрона, определяется множителем G/T , стоящим перед взвешенной суммой входных сигналов.

Основной заслугой Дж. Хопфилда было использование при анализе работы нейронной сети связанной с ней так называемой функции энергии, или функции Ляпунова. Функция энергии зависит от состояния системы и при каждом его изменении может только уменьшиться. Из любого положения можно двигаться в направлении ближайшего локального минимума функции энергии. Локальные минимумы функции энергии называются аттракторами системы, а множество состояний, движение из которых приводит к данному аттрактору, – его бассейном притяжения. Состояние системы – это паттерн активностей всех ее нейронов, а аттрактор –

это состояние, соответствующее запомненному сетью образу.

Функция энергии в случае сигмоидальной функции активации может быть получена в явном виде. Она представляет собой сумму двух членов, первый из которых зависит от знаменателя T , а второй – нет:

$$E = -\frac{G}{2T} \sum_i \sum_j w_{ij} x_i^2 + \\ + \sum_i \ln((1 + x_i)(1 - x_i)) + \sum_i \ln\left(\frac{1 + x_i}{1 - x_i}\right).$$

Когда значение T очень мало, большую величину имеет множитель G/T в уравнении сигмоидной функции активации. Функция активации имеет большую крутизну (близка к пороговой), вклад второго члена в функцию энергии пренебрежимо мал и ее форма определяется первым членом. Например, для сети из двух нейронов функция энергии в этом случае имеет два аттрактора, соответствующих активностям нейронов, близким к максимуму.

Когда T очень велико, то вклад первого члена в функцию энергии пренебрежимо мал, и она определяется вторым членом. В этом случае она имеет только один минимум, соответствующий нулевой активности нейрона. В промежуточных случаях каждый из членов вносит свой вклад в функцию энергии. С увеличением значения T два первоначальных аттрактора становятся все менее выраженными и в конце концов полностью исчезают т. е. со временем рельеф функции энергии сглаживается.

На рис. 4 тонкой линией показана исходная негладкая функция энергии, а толстой – сглаженная функция. Глобальный аттрактор, соответствующий стратегически более правильному решению проблемы, находится довольно далеко от исходного состояния сети и не может быть достигнут в случае негладкой функции энергии, так как сеть остановится в состоянии, соответствующем ближайшему аттрактору. И наоборот, в случае сглаженной функции энергии глобальный аттрактор может быть легко достигнут.

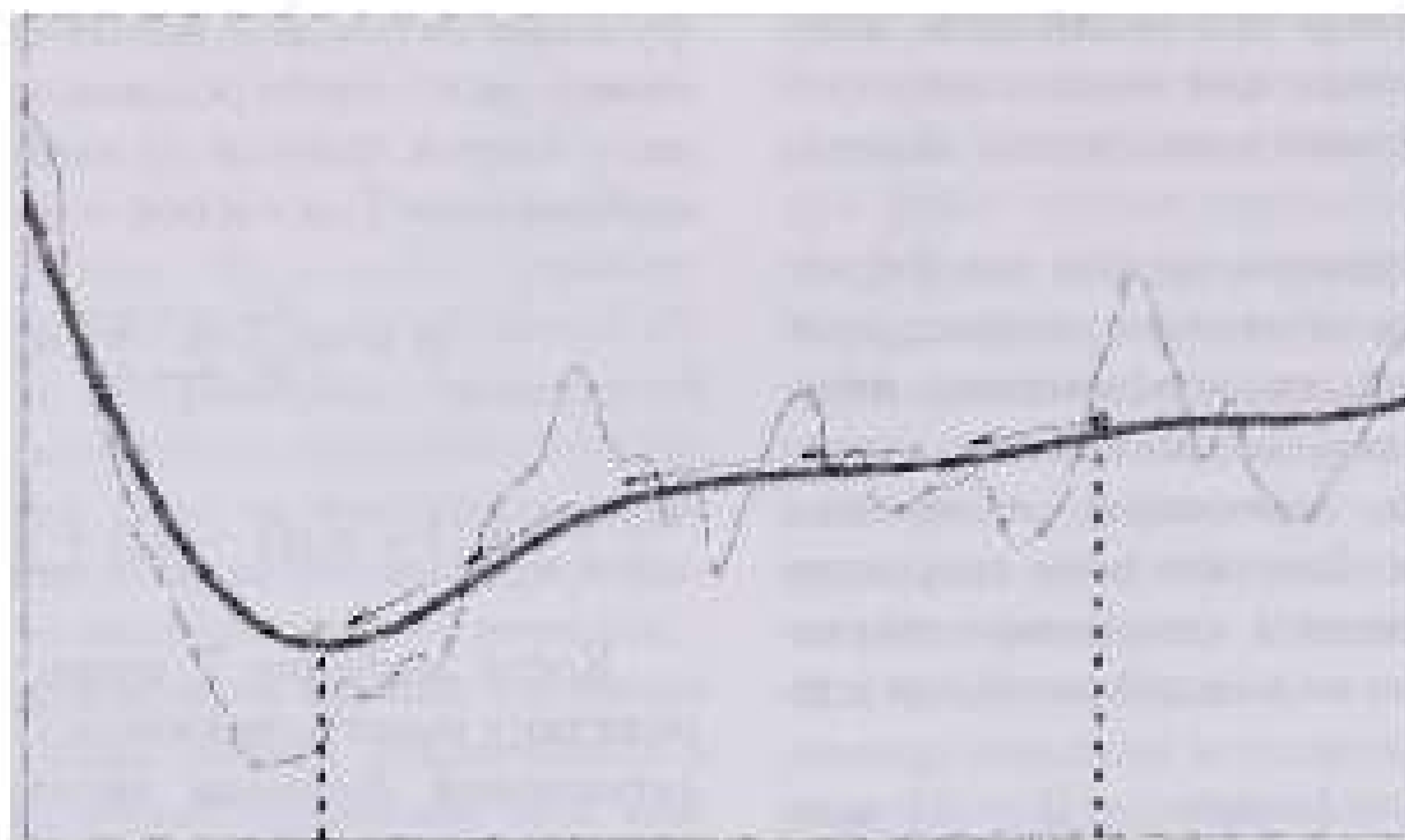


Рис. 4. Эффект сглаживания нейронной сети

При сглаживании теряются мелкие детали, которые в определенных ситуациях могут быть очень важны, и это следует учитывать.

Сравнение методов обучения. Продемонстрируем зависимость работы нейронной сети от метода, выбранного для ее обучения. В программном пакете MATLAB была спроектирована нейронная сеть, задачей которой являлось сопоставление входной группы точек одному из трех типов сигнала. Была выбрана архитектура многослойного персептрона с одним промежуточным слоем. Входной слой состоит из 100 нейронов, выходной – из 3, число нейронов в скрытом слое – 8, 10 или 12. В качестве функции активации выбрана сигмоидальная функция, так как она легко дифференцируется. Обучение сети происходило разными методами. Это:

- метод градиентного спуска;

- метод градиентного спуска с адаптивным обучением;

- метод градиентного спуска с учетом моментов;

- метод градиентного спуска с учетом моментов и с адаптивным обучением.

Процесс обучения завершается в одном из случаев: либо ошибка работы нейронной сети становится меньше значения, заданного изначально, либо количество эпох достигает заданного числа. Эпохой принято называть шаг алгоритма, действующего итеративно. Максимальная ошибка, заданная в начальных условиях для каждого метода тренировки, составляет 10^{-6} , максимально допустимое число эпох – 5000. Результаты обучения по различным алгоритмам представлены в табл. 1–4.

Таблица 1

Результаты обучения нейронных сетей методом градиентного спуска

Число нейронов в промежуточном слое	Количество групп точек в обучающей выборке	Время обучения сети, с	Количество эпох	Погрешность классификации
8 нейронов	100 групп точек	303,405	5000	0,0238
8 нейронов	160 групп точек	556,826	5000	0,0258
10 нейронов	100 групп точек	412,161	5000	0,0111
10 нейронов	160 групп точек	585,325	5000	0,0125
12 нейронов	100 групп точек	420,475	5000	0,0183
12 нейронов	160 групп точек	593,008	5000	0,0165

Таблица 2

Результаты обучения нейронных сетей методом градиентного спуска с адаптивным обучением

Число нейронов в промежуточном слое	Количество групп точек в обучающей выборке	Время обучения сети, с	Количество эпох	Погрешность классификации
8 нейронов	100 групп точек	64,975	536	11,9580e-007
8 нейронов	160 групп точек	72,795	689	14,7110e-007
10 нейронов	100 групп точек	44,947	509	9,1795e-007
10 нейронов	160 групп точек	79,215	656	10,2940e-007
12 нейронов	100 групп точек	38,057	441	13,5030e-007
12 нейронов	160 групп точек	63,578	542	14,7440e-007

Таблица 3

Результаты обучения нейронных сетей методом градиентного спуска с учетом моментов

Число нейронов в промежуточном слое	Количество групп точек в обучающей выборке	Время обучения сети, с	Количество эпох	Погрешность классификации
8 нейронов	100 групп точек	434,096	5000	0,0133
8 нейронов	160 групп точек	560,315	5000	0,0138
10 нейронов	100 групп точек	431,142	5000	0,0034
10 нейронов	160 групп точек	583,036	5000	0,0043
12 нейронов	100 групп точек	436,354	5000	0,0145
12 нейронов	160 групп точек	593,925	5000	0,0159

Таблица 4

Результаты обучения нейронных сетей методом градиентного спуска с учётом моментов и с адаптивным обучением

Число нейронов в промежуточном слое	Количество групп точек в обучающей выборке	Время обучения сети, с	Количество эпох	Погрешность классификации
8 нейронов	100 групп точек	27,858	319	9,3493e-007
8 нейронов	160 групп точек	36,652	319	10,0160e-007
10 нейронов	100 групп точек	28,582	314	9,8913e-007
10 нейронов	160 групп точек	39,68	312	9,3940e-007
12 нейронов	100 групп точек	27,27	310	11,0380e-07
12 нейронов	160 групп точек	38,007	312	14,1030e-007

Погрешность классификации – это основной критерий анализа результатов обучения. Обратим внимание на значения времени обучения сети и количества эпох.

Как видно из табл. 1 и 3, при обучении нейронных сетей двумя из предложенных методов, методом градиентного спуска и методом градиентного спуска с учетом моментов, было достигнуто максимальное количество шагов, при этом погрешность классификации в 104 выше заданного значения. Задачу можно считать нерешенной.

В табл. 2 и 4 показано, что другие два метода, метод градиентного спуска с адаптивным обучением и метод градиентного спуска с учетом моментов и с адаптивным обучением, с задачей справились, к тому же время обучения сети показано на порядок меньше.

Сравнивая полученные результаты, можно говорить о том, что оптимальной для обучения нейронной сети представляется выборка из 100 групп точек на каждый тип сигнала. Погрешность классификации в этом случае для каждой архитектуры нейронной сети преимущественно ниже, чем при обучении выборкой из 160 групп точек. При увеличении количества обучающих групп точек наблюдается явление переобучения сети.

Отметим, что наименьшая погрешность классификации признака наблюдается у нейронных сетей с 10 нейронами в промежуточном слое. Из этого можно заключить, что увеличение количества нейронов в скрытом слое не всегда приводит к улучшению работы сети.

Сделаем основной вывод: наилучшим образом обучаются сети, методом тренировки которых являются метод градиентного спуска с адаптивным обучением или метод градиентного спуска с учетом моментов и адаптивным обучением (последний алгоритм предпочтительнее). Данные методы обучения показывают погрешность классификации на 4–5 порядков меньше, чем метод градиентного спуска и метод градиентного спуска с учетом моментов.

Применение вейвлет-преобразования. При обучении каждым из рассмотренных методов нейронная сеть считается наилучшим образом натренированной, если был найден глобальный минимум функции ошибок (или минимум функции энергии – выбор функции зависит от модели нейронной сети). Для определения его расположения потребовалось разное время.

В модели Хопфилда прибегает к варианту сглаживания функции энергии с целью сделать локальные минимумы менее выраженными. Однако данный подход следует применять с осторожностью, т. к. функция энергии может не иметь явных скачков, и тогда решение задачи станет неверным.

Предложим другой вариант. Представляется возможным ускорить процесс обучения нейронной сети и в первую очередь сделать результат задачи поиска глобального минимума более точным, если подвергнуть функцию ошибки быстрому вейвлет-преобразованию [5]. Во-первых, преобразование (один уровень) можно вычислить за $O(n)$

операций. Во-вторых, оно не только раскладывает сигнал на некоторое подобие частотных полос (путем анализа его в различных масштабах), но и представляет временную область, то есть моменты возникновения тех или иных частот в сигнале (рис. 5). Данное предположение является целью дальнейшего исследования оптимизации работы нейронных сетей.

На рис. 6 и 7 представлено разложение

функции энергии под действием различных вейвлет-преобразований. Рассматривая данные изображения, можно полагать, что области глобального минимума функции энергии соответствуют большим белым пропуски либо данной области характерен переход от темного цвета на нижних уровнях к светлому цвету на верхних уровнях. На рисунках области, представляющие интерес, обведены.

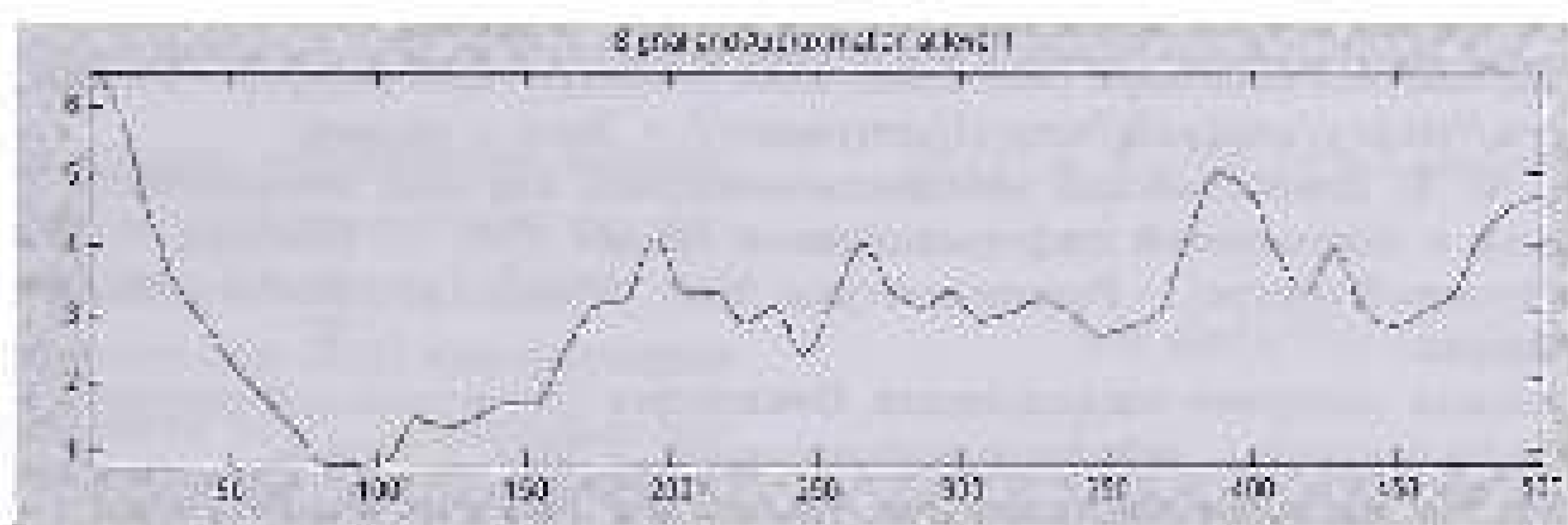


Рис. 5. Сигнал и его аппроксимация на уровне 1

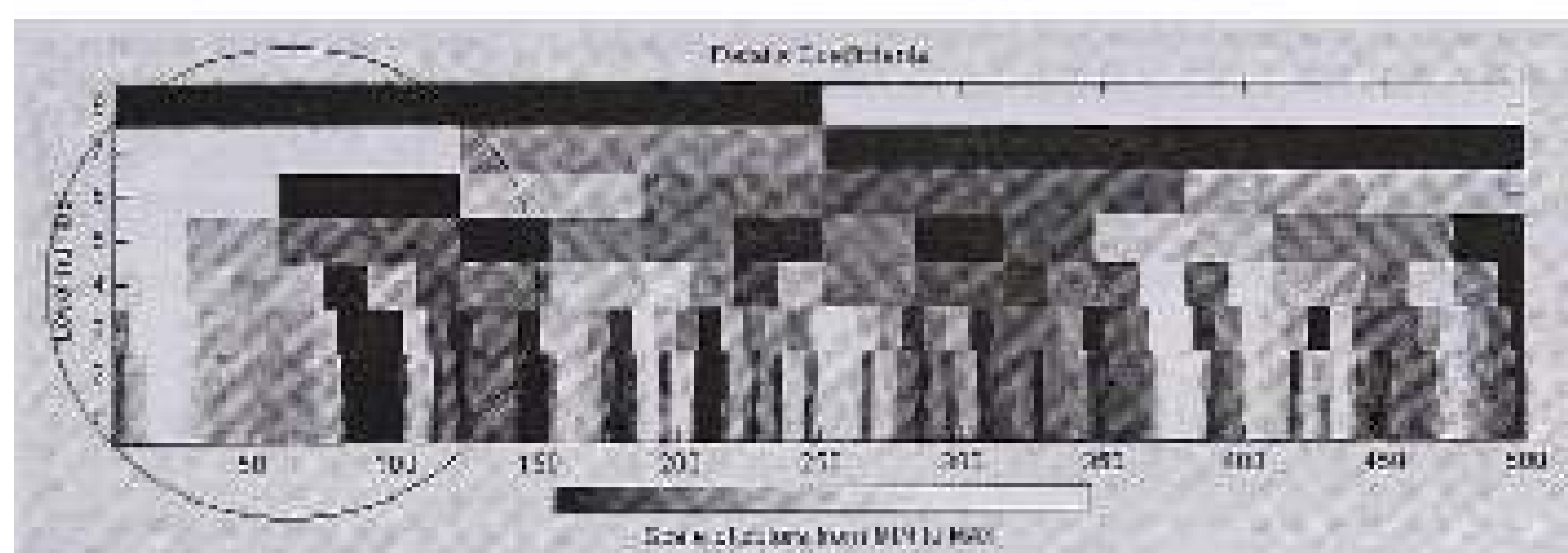


Рис. 6. Разложение функции энергии под действием вейвлет-функции Хаара (максимальный уровень 8)

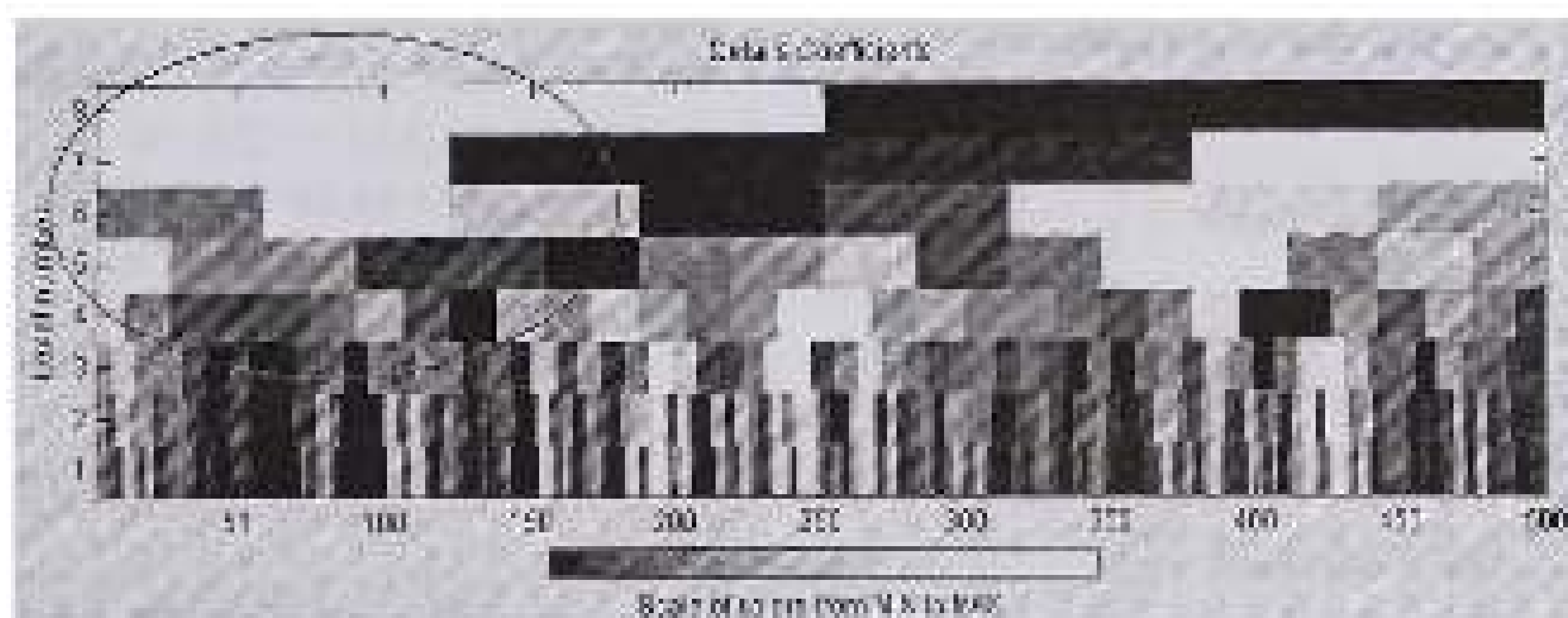


Рис. 7. Разложение функции энергии под действием вейвлет-функции Добеши (коэффициент равен 2, максимальный уровень – 8)

Во многих случаях желательнее наделить каждый нейрон обучаемым смещением. Это приводит к ускорению процесса обучения. Смещение обучается аналогично тому, как обучаются все остальные веса.

В связи с этим поверхность функции ошибки строится в трехмерном пространстве n базиса вес – смещение – ошибка, что расширяет возможности вейвлет-анализа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ежов А. А. Нейрокомпьютинг в его применение в экономике и бизнесе: учеб. пособие / А. А. Ежов, С. А. Шумский. – М. : МИФИ, 1998. – 224 с.
2. Кальченко Д. «КомпьютерПресс» / Д. Кальченко [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.neuroproject.ru/articles_dok_nl.php. – Загл. с экрана.
3. Научная библиотека компании BaseGroup Ltd [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.basegroup.ru/library/analysis/neural/conjugate/>. – Загл. с экрана.
4. Терехин А. Т. Всероссийская междисциплинарная научная конференция «Третий возраст старшее поколение в современной информационной среде» / А. Т. Терехин, Е. В. Вудилева, Л. М. Качалова [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.conf.muh.ru/080130/thesis_Terchin.htm. – Загл. с экрана.
5. Универсальная интернет-энциклопедия Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/_вейвлет-преобразование. – Загл. с экрана.
6. Универсальная интернет-энциклопедия Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_обратного_распространения_ошибки. – Загл. с экрана.
7. Универсальная интернет-энциклопедия Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_сопряженных_градиентов. – Загл. с экрана.
8. Электронный учебник StatSoft [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.statsoft.ru/home/portal/applications/NeuralNetworksAdvisor/Adv-new/DeltaBarDelta.htm>. – Загл. с экрана.
9. Электронный учебник StatSoft [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.statsoft.ru/home/portal/applications/NeuralNetworksAdvisor/Adv-new/QuickPropagation.htm>. – Загл. с экрана.

Поступила 26.09.10.

УПРАВЛЕНИЕ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

А. А. Гурченков, И. М. Иванов, А. И. Фесечко

В статье рассмотрен способ декомпозиции по базовым типам движения и взаимодействия в задаче динамики твердого тела с полостью, содержащей жидкость.

При решении задачи управления вращающимися твердыми телами с жидким наполнением (идеальная жидкость) будем использовать выражение для $\vec{\Omega}(t)$ как функции управляющего момента $\vec{M}(t)$, с помощью которого можно изменять состояние динамической системы, переводя ее из одного состояния в другое. В дальнейшем будем рассматривать различные классы задач оптимального управления.

1. Переход от интегрального уравнения к системе дифференциальных уравнений. Рассмотрим выражение для угловой скорости, полученное в [3-4],

$$\vec{\Omega}(t) = \int_0^t \vec{M}(\tau) \left(X e^{\mathbf{p}^{(1)}(t-\tau)} + Y e^{\mathbf{p}^{(2)}(t-\tau)} \right) d\tau. \quad (1)$$

С помощью методов теории оптимального управления [1-2] интегральное соотношение (1) преобразуем к системе дифференциальных уравнений. Введем комплексные $\Omega = \Omega_x - i\Omega_y$, $M = M_x - iM_y$ и запишем выражение для Ω_x и Ω_y в виде (1):

$$\begin{aligned} \Omega_x(t) = & \int_0^t M_x(\tau) (X \cos(\eta^{(1)}(t-\tau)) + \\ & + Y \cos(\eta^{(2)}(t-\tau))) d\tau + \\ & + \int_0^t M_y(\tau) (X \sin(\eta^{(1)}(t-\tau)) + \\ & + Y \sin(\eta^{(2)}(t-\tau))) d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Omega_y(t) = & \int_0^t -M_x(\tau) (X \sin(\eta^{(1)}(t-\tau)) + \\ & + Y \sin(\eta^{(2)}(t-\tau))) d\tau + \\ & + \int_0^t M_y(\tau) (X \cos(\eta^{(1)}(t-\tau)) + \\ & + Y \cos(\eta^{(2)}(t-\tau))) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} A(t) = & \int_0^t [M_x(\tau) X \cos(\eta^{(1)}(t-\tau)) + \\ & + M_y(\tau) X \sin(\eta^{(1)}(t-\tau))] d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(t) = & \int_0^t [M_x(\tau) X \cos(\eta^{(2)}(t-\tau)) + \\ & + M_y(\tau) X \sin(\eta^{(2)}(t-\tau))] d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(t) = & \int_0^t [-M_x(\tau) X \sin(\eta^{(1)}(t-\tau)) + \\ & + M_y(\tau) X \sin(\eta^{(2)}(t-\tau))] d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(t) = & \int_0^t [-M_x(\tau) X \sin(\eta^{(1)}(t-\tau)) + \\ & + M_y(\tau) X \sin(\eta^{(2)}(t-\tau))] d\tau. \end{aligned}$$

© А. А. Гурченков, И. М. Иванов, А. И. Фесечко, 2010

Тогда $\Omega_x(t) = A(t)X + B(t)Y$ и $\Omega_y(t) = C(t)X + D(t)Y$. Запишем следующую систему:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{cases} \dot{\Omega}_x(t) = M_x(t)(X + Y) + \\ + \eta^{(1)}C(t) + \eta^{(2)}D(t), \\ \dot{\Omega}_y(t) = M_y(t)(X + Y) + \\ + \eta^{(1)}A(t) + \eta^{(2)}B(t), \\ \dot{A}(t) = M_x(t)X + \eta^{(1)}C(t), \\ \dot{B}(t) = M_x(t)X + \eta^{(2)}C(t), \\ \dot{C}(t) = M_y(t)X + \eta^{(1)}C(t), \\ \dot{D}(t) = M_y(t)X + \eta^{(2)}C(t); \end{cases} \quad (4)$$

$$x(0) = \begin{cases} \Omega_x(0) = 0, \\ \Omega_y(0) = 0, \\ A(0) = 0, \\ B(0) = 0, \\ C(0) = 0, \\ D(0) = 0. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения ($n = 6$, $m = 2$):

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^{(1)} & \eta^{(2)} \\ 0 & 0 & -\eta^{(1)} & -\eta^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^{(2)} \\ 0 & 0 & -\eta^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta^{(2)} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{n \times m} = \begin{pmatrix} X + Y & 0 \\ 0 & X + Y \\ X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$x_{0 \times n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

С учетом (5) систему (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{M}(t), \\ \vec{x}(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Задача безусловной минимизации с терминальным функционалом. Рассмотрим задачу оптимального управления без ограничений на управляющий момент. Будем использовать классический квадратичный терминальный функционал с квадратичной штрафной функцией.

Задача оптимального управления системой (6) имеет вид

$$J(M) = (\Omega_x(T) - \Omega_1^0)^2 + (\Omega_y(T) - \Omega_2^0)^2 + \\ + \gamma \int_0^T (M_x^2(t) + M_y^2(t)) dt \rightarrow \min,$$

или в векторном виде

$$J(M) = \|Z\vec{x}(T; M) - b\|_{E^n}^2 + \\ + \gamma \int_0^T \|\vec{M}(t)\|_{E^m}^2 dt \rightarrow \min, \quad (7)$$

где $\vec{M}(t) = (M_x(t), M_y(t))^T$ — неизвестная функция управления; γ — заданное действительное положительное число; $Z = \|z_{ij}\|_{6 \times 6}$ — матрица 6×6 , причем отличны от нуля только $z_{1,1} = z_{2,2}$; $b = (\Omega_1^0, \Omega_2^0, 0, 0, 0, 0)^T$ — столбец; $\Omega_i^0, i = 1, 2$ — заданные действительные числа.

Будем решать задачу (7) с использованием принципа максимума Понтрягина. Функция Гамильтона-Пострыгина имеет вид

$$H = \gamma \|\vec{M}(t)\|^2 + \langle A\vec{x}(t) + B\vec{M}(t), \psi(t) \rangle. \quad (8)$$

Сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -H'_x = -A^T \psi(t), \\ \psi(T) = \Phi' \left(x(T; \vec{M}) \right) = \\ = 2Z \left(Zx(T; \vec{M}) - b \right). \end{cases} \quad (9)$$

С учетом сопряженной системы выражения для оптимального управления запишем в виде

$$\begin{aligned} H'_{M_x} &= 2\gamma M_x + (X + Y)\psi_1 + \\ &+ X\psi_3 + Y\psi_4, \\ M_x^* &= -\frac{(X + Y)\psi_1 + X\psi_3 + Y\psi_4}{2\gamma}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} H'_{M_y} &= 2\gamma M_y + (X + Y)\psi_2 + \\ &+ X\psi_5 + Y\psi_6, \\ M_y^* &= -\frac{(X + Y)\psi_2 + X\psi_5 + Y\psi_6}{2\gamma}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для определения оптимального управления разрешим сопряженную систему (9). Из вида матрицы A^T можем сразу выписать выражения для первых двух компонент $\psi(t)$:

$$\psi_1(t) = 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0),$$

$$\psi_2(t) = 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0).$$

Остальные компоненты найдем, решив следующую систему:

$$\begin{aligned} \psi_3(t) &= 2\eta^{(1)}(\Omega_y(T) - \Omega_2^0) + \eta^{(1)}\psi_6(t), \\ \psi_4(t) &= 2\eta^{(2)}(\Omega_y(T) - \Omega_2^0) + \eta^{(2)}\psi_6(t), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\psi_5(t) = -2\eta^{(1)}(\Omega_x(T) - \Omega_1^0) - \eta^{(1)}\psi_3(t),$$

$$\psi_6(t) = -2\eta^{(2)}(\Omega_x(T) - \Omega_1^0) - \eta^{(2)}\psi_4(t).$$

Уравнения 1 и 3, 2 и 4 системы (12) можно решить независимо. В итоге получим

$$\begin{aligned} \psi_3(t) &= 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0)(\cos((T-t)\eta^{(1)}) - 1) + \\ &+ 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0)\sin(\eta^{(1)}(T-t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_4(t) &= 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0)(\cos((T-t)\eta^{(2)}) - 1) + \\ &+ 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0)\sin(\eta^{(2)}(T-t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_5(t) &= 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0)(\cos(\eta^{(1)}(T-t)) - 1) + \\ &+ 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0)\sin(\eta^{(1)}(T-t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_6(t) &= 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0)(\cos(\eta^{(2)}(T-t)) - 1) + \\ &+ 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0)\sin(\eta^{(2)}(T-t)). \end{aligned}$$

Полученные решения сопряженной системы нужно подставить в (10) и (11), и окончательно значения оптимального управления можно будет записать, определив параметры $\Omega_x(t)$ и $\Omega_y(t)$. Для этого можно воспользоваться системой двух линейных уравнений относительно $\Omega_x(t)$ и $\Omega_y(t)$, которая получается из (2) и (3) при $t = T$ подстановкой в нее выражений (10) и (11) и найденных решений сопряженной системы (9). А именно:

$$\begin{aligned} \Omega_x(T) &= \int_0^T M_x^*(\tau)(X \cos(\eta^{(1)}(T-\tau)) + \\ &+ Y \cos(\eta^{(2)}(T-\tau)))d\tau + \\ &+ \int_0^T M_y^*(\tau)(X \cos(\eta^{(1)}(T-\tau)) + \\ &+ Y \sin(\eta^{(2)}(T-\tau)))d\tau, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Omega_y(T) &= \int_0^T M_x^*(\tau)(X \sin(\eta^{(1)}(T-\tau)) + \\ &+ Y \sin(\eta^{(2)}(T-\tau)))d\tau + \\ &+ \int_0^T M_y^*(\tau)(X \cos(\eta^{(1)}(T-\tau)) + \\ &+ Y \sin(\eta^{(2)}(T-\tau)))d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражения (13) и (14) окончательно решают поставленную задачу в аналитической форме.

3. Задача с разрывным управлением. Рассмотрим методический пример управления системой, реализующий максимальное отклонение Ω_x .

Задача оптимального управления имеет вид

$$\begin{aligned} J(M) &= \Omega_x(T) - \\ &- \gamma \int_0^T (M_x(t) + M_y(t))dt \rightarrow \max, \\ 0 &\leq M_x(t) \leq 1, \quad 0 \leq M_y(t) \leq 1, \\ &\forall t \in [0; T]. \end{aligned} \quad (15)$$

Эквивалентная задача на минимум:

$$J(M) = \gamma \int_0^T (M_x(t) + M_y(t)) dt - \Omega_x(T) \rightarrow \min, \quad (16)$$

$$0 \leq M_x(t) \leq 1, \quad 0 \leq M_y(t) \leq 1,$$

$$\forall t \in [0; T].$$

В данной задаче нужно найти оптимальное управление системой (6), которое обеспечит максимальное отклонение Ω_x при определенном штрафе за величину управляющего момента, где γ – ценовой коэффициент. Функция Гамильтона–Понтрягина для задачи (16) запишется в виде:

$$H = \gamma (M_x(t) + M_y(t)) + \langle A\dot{x}(t) + BM(t), \psi(t) \rangle, \quad (17)$$

где $M(t) = (M_1(t), M_2(t))^T$ – неизвестная функция управления; $\psi(t)$ – решение сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = -H'_x, \quad \psi_1(T) = -A^T \psi(t), \\ \psi_i(T) = 1, \quad \psi_i(T) = 0, \quad i = 2, \dots, 6. \end{cases} \quad (18)$$

Перепишем (18) в следующем виде (индексом внизу обозначены компоненты вдоль координатных осей x и y):

$$\begin{aligned} H &= M_x(t)((B^x \psi(t))_x - \gamma) + \\ &+ M_y(t)((B^y \psi(t))_y - \gamma) + \langle Ax(t), \psi(t) \rangle, \\ H &= \langle Ax(t), \psi(t) \rangle + M_x(t)((X + Y)\psi_1(t) + \\ &+ X\psi_3(t) + Y\psi_4(t) - \gamma) + \\ &+ M_y(t)((X + Y)\psi_2(t) + X\psi_5(t) + Y\psi_6(t) - \gamma). \end{aligned}$$

С учетом ограничений на управление (16) максимум функции Гамильтона–Понтрягина будет достигаться при условиях

$$\begin{cases} M_x(t) = 1, \text{ если } (X + Y)\psi_1(t) + \\ + X\psi_3(t) + Y\psi_4(t) - \gamma \geq 0, \\ M_x(t) = 0, \text{ если } (X + Y)\psi_1(t) + \\ + X\psi_3(t) + Y\psi_4(t) - \gamma < 0; \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} M_y(t) = 1, \text{ если } (X + Y)\psi_2(t) + \\ + X\psi_5(t) + Y\psi_6(t) - \gamma \geq 0, \\ M_y(t) = 0, \text{ если } (X + Y)\psi_2(t) + \\ + X\psi_5(t) + Y\psi_6(t) - \gamma < 0. \end{cases}$$

Решим сопряженную систему (19) и найдем условия для точек переключения

$$\psi_1(t) = 1, \quad \psi_2(t) = 0,$$

$$\psi_3(t) = \eta^{(1)}\psi_5(t),$$

$$\psi_4(t) = \eta^{(2)}\psi_6(t),$$

$$\psi_5(t) = -\eta^{(1)} - \eta^{(1)}\psi_3(t),$$

$$\psi_6(t) = -\eta^{(2)} - \eta^{(2)}\psi_4(t).$$

Решая уравнения для $\psi_3(t)$ и $\psi_5(t)$, $\psi_4(t)$ и $\psi_6(t)$ независимо, получим

$$\begin{cases} \psi_3(t) = \cos(\eta^{(1)}(T - t)) - 1, \\ \psi_5(t) = \sin(\eta^{(1)}(T - t)); \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \psi_4(t) = \cos(\eta^{(2)}(T - t)) - 1, \\ \psi_6(t) = \sin(\eta^{(2)}(T - t)). \end{cases}$$

Тогда условия для точек переключения t_{M_x} и t_{M_y} соответственно относительно компонент M_x и M_y оптимального управления будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} &X \cos(\eta^{(1)}(T - t_{M_x})) + \\ &+ Y \cos(\eta^{(2)}(T - t_{M_x})) = \gamma, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &X \sin(\eta^{(1)}(T - t_{M_y})) + \\ &+ Y \sin(\eta^{(2)}(T - t_{M_y})) = \gamma. \end{aligned} \quad (21)$$

Метод декомпозиции по базовым типам движения и взаимодействия формально выражен в виде разложения задачи динамики твердого тела с полостью, содержащей жидкость, на две части.

Первая, гидродинамическая, часть задачи сводится к решению некоторых стационарных краевых задач на собственные значения,

зависящих от геометрии полости и не зависящих от движения тела, и затем к расчету коэффициентов, характеризующих влияние жидкости на движение тела.

Вторая, динамическая, часть задачи сводится к решению уравнений движения твердого тела. Здесь существенным является то обстоятельство, что на характер возму-

щенного движения никаких ограничений не накладывается. Этот подход делает возможным широкую постановку различных задач оптимального управления, определения оптимальных конструктивно-технологических параметров динамической системы, изучения устойчивости движения управляемого объекта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории управления / Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. – М.: ИЛ, 1962. – 336 с.
2. Беллман Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус. – М.: Наука, 1965. – 458 с.
3. Гурченков А. А. Вихревые движения жидкости в полости вращающегося тела / А. А. Гурченков. – М.: Нар. учитель, 2001.
4. Гурченков А. А. Момент сил внутреннего трения быстровращающегося цилиндрического сосуда, заполненного вязкой жидкостью / А. А. Гурченков // Изв. вузов. Приборостроение. – 2001. – Т. 44, № 2. – С. 44–49.

Поступила 26.10.10.

О МЕТОДАХ ОЦЕНКИ СОЧЕТАЕМОСТИ СЛОВ В МОДЕЛЯХ СЕМАНТИЧЕСКОГО ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Н. П. Петрова

В статье охарактеризованы структура и особенности моделей семантического предпочтения. Рассмотрены методы оценки сочетаемости слов русского языка на основе эвристически определяемых числовых показателей. Указанные методы могут быть использованы при изучении лингвистических моделей и при решении прикладных задач компьютерной лингвистики.

Как известно [1; 3–6], в математической лингвистике различают модели, которые воспроизводят построение, или порождение, текста, и модели, которые воспроизводят восприятие текста. Модели первого рода называют порождающими, модели второго рода – анализирующими, или аналитически-

ми. Оба эти типа моделей можно объединить в один класс функциональных моделей речевой деятельности.

Под порождением текста понимается воплощение в данном тексте некоторого смысла посредством перехода «смысл → текст». Восприятие текста – это исключение опреде-

© Н. П. Петрова, 2010

ленного смысла из данного текста, или переход «текст → смысл». Соответственно модели речевой деятельности должны устанавливать соотношение «смысл $\rightarrow$ текст». Порождающая и аналитическая модели воспроизводят каждая одну из сторон речевой деятельности, взятые вместе они отражают речевую деятельность в целом [1].

Модели речевой деятельности – не единственно возможный тип лингвистических моделей. Для того чтобы осуществлялась речевая деятельность, необходимо наличие языковой системы, создаваемой посредством моделирования.

О свойствах системы возможно судить по результатам ее функционирования, прежде всего тексту, по его характеристикам. Поэтому моделирование системы языка отражает переход «текст → языковая система». Этот тип модели можно назвать исследовательским, так как здесь представлена прежде всего деятельность исследователя-лингвиста по выяснению системы языка.

Вопросы построения и классификации лингвистических моделей, а также особенности разработки языков представления знаний рассмотрены в [7-8] и др. работах.

К моделям типа «смысл – текст», представляющим наибольший практический интерес, относятся следующие модели: модель семантического предпочтения (preference semantics) (Уилкс); модель концептуальной зависимости (conceptual dependency) (Шенк); модель Жолковского «смысл – текст».

При разработке модели семантического предпочтения (модели СП) ставятся задачи:

- 1) анализировать связные тексты, а не отдельные предложения;
- 2) принимать для анализа любые осмысленные предложения, а не только грамматически правильные;
- 3) формализовать семантический анализ;
- 4) разработать машинно-ориентированную процедуру анализа;
- 5) рассматривать смысл предложения не просто как список значений слов с соответствующей синтаксической структурой, а выделять структурированную форму сообщения, выражающую смысл предложения;

б) уметь обрабатывать предложения, содержащие неизвестные слова.

При построении модели СП предполагается, что текст характеризуется следующими сущностями: смыслами слов (wordsenses), сообщениями (message-form), фрагментами текста (text-fragments) и семантической совместимостью (= сочетаемостью) (semantic compatibility). Сообщения рассматриваются как теоретические построения, посредством которых для каждого слова, входящего во фрагмент текста, может быть выбран один из смыслов слова (т. е. снята многозначность). Слову назначается тот из его многих смыслов (значений), который образует «сообщение», согласующееся в конце концов с рассматриваемым фрагментом текста. При этом имеется в виду, что данное значение слова может подойти для нескольких сообщений, но выбирается то из них, которое согласуется с рассматриваемым текстом. Согласующимися считаются те сообщения, которые удовлетворяют правилам семантической совместимости, применяющимся к целому тексту.

Модель СП базируется на следующих положениях: существует конечное число всевозможных сообщений; существует формальный способ выражения сообщений; существует формальный метод объединения сообщений во фрагмент текста.

Для выражения сущностей, выделяемых моделью СП в тексте, вводятся следующие понятия: «семантическая формула» для представления смысла слова; «образец» для представления сообщения; «правила следования» для выражения правил семантической совместимости сообщений.

Важную роль при построении и использовании моделей СП играет проблема сочетаемости слов. Как известно, в формальных искусственных языках программирования правила комбинирования языковых знаков формулируются исключительно исходя из их смыслового содержания.

Особенностью естественных языков является нестандартная сочетаемость знаков на разных языковых уровнях, при которой возможность их комбинирования определяется не только их смыслом. Нестандартность лек-

сической сочетаемости означает, что одни слова допускают совместное употребление, а другие, пусть даже с тем же смыслом, – нет.

Лексическая сочетаемость слов частично представлена в словарях словосочетаний; в основном словари описывают сравнительно немногочисленные фразеологические (несвободные) словосочетания, смысл которых не выводится из смысла слов-компонентов. Задача отображения всех устойчиво сочетающихся слов, включая свободные сочетания, ими не решается. В то же время определение семантической допустимости различных сочетаний слов необходимо для решения ряда задач компьютерной лингвистики. В число указанных задач входят следующие задачи:

(А) автоматическая генерация текстов на естественном языке (использование устойчивых словосочетаний дает возможность получать идиоматичные тексты);

(В) синтаксический разбор предложений текста (учет допустимых в речи словосочетаний позволяет сократить число возможных вариантов разбора);

(С) автоматизация редактирования текстов (знание допустимых словосочетаний дает возможность выявлять некоторые виды лексико-семантических ошибок).

Основным источником словосочетаний и средством определения их допустимости в речи являются тексты на естественном языке. Для автоматизированного построения словарей словосочетаний могут применяться так называемые корпуса текстов – коллекции текстов, в которых лингвистами предварительно проведена морфосинтаксическая разметка слов. Однако создание представительного размеченного корпуса текстов – сама по себе длительная и кропотливая задача, поэтому в компьютерной лингвистике все более широко используется Интернет, рассматриваемый как огромный зашумленный текстовый корпус современного языка [2].

Рассмотрим метод оценки сочетаемости слов русского языка, который опирается на понятие коллокации, близкое к широко используемому в русистике понятию словосочетания. Под словосочетанием понимается соединение нескольких знаменательных слов на основе подчинительной грамматической свя-

зи (чаще всего связи согласования и управления). Такое определение не накладывает никаких ограничений на семантику сочетаемых слов. При использовании коллокаций рассматриваются только словосочетания, которые встречаются в осмысленных текстах, и тем самым считаем коллокацией любую синтаксически связанную и семантически допустимую пару знаменательных слов.

Компонентами коллокаций могут быть слова четырех главных частей речи: существительные, глаголы, прилагательные (включая причастия) и наречия (включая деепричастия). Наиболее часто встречаются следующие четыре синтаксических типа коллокаций:

- 1) определяемое слово → определяющее слово;
- 2) существительное → его дополнение;
- 3) глагол → его дополнение;
- 4) сказуемое → подлежащее.

Как показал анализ, большинство существующих в русском языке именных и глагольно-именных словосочетаний охватываются указанными типами коллокаций.

Синтаксические связи между знаменательными словами коллокаций могут реализовываться непосредственно (например, *обнаружили изъяны*) или через служебные слова (обычно через предлоги: *учились в университете*), в последнем случае мы считаем эти служебные слова частью коллокаций.

Заметим, что в предложениях связного текста слова-компоненты коллокаций могут либо непосредственно соседствовать, либо разделяться другими словами, причем не только собственными служебными словами: *учиться в недавно построенной школе*. В то же время эти слова-компоненты могут случайно оказаться рядом, не образуя коллокации из-за отсутствия синтаксической связи: *не любил учиться, в школе было интересно*. Если же рассматриваются тексты сети Интернет, то в них в дополнение к таким встречам существуют многочисленные ошибки в употреблении словосочетаний и ошибки, вызванные некорректной разметкой страниц. Поскольку исследовать синтаксические связи во всех текстах сети Интернет не представляется возможным, для определения допусти-

мости словосочетаний применимы только статистические критерии [2].

Один из известных статистических критериев, применяемых в корпусной лингвистике, основан на так называемом показателе взаимной информации (ПВИ):

$$\text{ПВИ}(V, W) = \ln \frac{S \cdot N(V, W)}{N(V) \cdot N(W)}, \quad (1)$$

Согласно критерию, основанному на формуле (1), пара слов (V, W) образует устойчивое сочетание, если относительная частота $N(V, W)/S$ совместной встречи слов на близком расстоянии в пределах всего текстового корпуса больше произведения относительных частот $N(V)/S$ и $N(W)/S$ слов V и W , рассматриваемых по отдельности (S – размер корпуса):

$$\text{ПВИ}(V, W) > 0.$$

Указанный критерий неприменим в случае Интернет-корпуса, поскольку, во-первых, поисковые машины измеряют статистику встреч записываемого слова (или комбинации слов) только в количестве содержащих эти слова страниц, а во-вторых, размер Интернет-корпуса (понимаемый как полное число страниц, индексируемых поисковой машиной) – сложно вычисляемая величина. В работе [2] авторы решили использовать в качестве меры устойчивости и допустимости сочетания слов величину, сходную с ПВИ:

$$\text{ПСС}(V, W) = \ln \frac{P \cdot N(V, W)}{\sqrt{N(V) \cdot N(W)}}, \quad (2)$$

где P – некоторая положительная константа. Величина (2), названная показателем семантической совместимости (ПСС), придает большее, чем ПВИ, значение совместной

встречаемости слов. В то же время, как и ПВИ, ПСС сохраняет свое значение при пропорциональном изменении величин $N(V)$, $N(W)$ и $N(V, W)$ и тем самым практически не зависит от непрерывного роста массивов данных поисковой машины во времени.

Как показано в [2], для практического применения ПСС удобно взять основание логарифма равным 2 и подобрать константу P так, чтобы большинство устойчивых коллокаций любого синтаксического типа имели отрицательное значение ПСС. Таким образом, уточненная формула для ПСС имеет вид

$$\text{ПСС}(V, W) = \begin{cases} 16 + \log_2 \frac{N(V, W)}{\sqrt{N(V) \cdot N(W)}}, & \text{если } N(V, W) > 0 \\ -\infty, & \text{если } N(V, W) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $-\infty$ соответствует большей по абсолютной величине отрицательной константе, которая берется в случаях, когда оцениваемые слова вообще не встречаются вместе в изучаемых массивах.

С учетом формулы (3) критерий семантической совместимости пары слов $N(V, W)$ примет вид

$$\text{ПСС}(V, W) > Q,$$

где Q – константа, близкая к нулю и подбираемая экспериментально.

Описанную методику, базирующуюся на эвристически введенных показателях семантической совместимости (ПСС), целесообразно использовать для решения задач (А), (В), (С) и для исследования моделей семантического предпочтения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Апресян Ю. Д. Идеи и методы современной структурной лингвистики / Ю. Д. Апресян. – М. : Наука, 1966. – 280 с.
2. Большакова Е. И. Метод оценки сочетаемости слов на базе текстов сети Интернет / Е. И. Большакова, А. Н. Кипликов // Вестн. Моск. ун-та. – Сер. 15, вычисл. математика и кибернетика. – 2008. – № 4. – С. 46–60.
3. Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки / А. В. Гладкий. – М. : Наука, 1973. – 368 с.
4. Вежбицкая А. Семантические универсалии и описание языков / А. Вежбицкая. – М. : Наука, 1999. – 780 с.
5. Касевич В. Б. Элементы общей лингвистики / В. Б. Касевич. – М. : Наука, 1977. – 177 с.

6. Мельчук И. А. Толково-комбинаторный словарь современного русского языка. Опыт семантико-синтаксического описания русской лексики / И. А. Мельчук, А. К. Жолковский. – Wien : Wiener Slawistischer Almanach, 1984.

7. Петрова Н. П. О построении и классификации лингвистических моделей, используемых при разработке систем искусственного интеллекта / Н. П. Петрова // Избр. вопр. соврем. естествознания. Об. науч. тр. – М. : МИИТ, 2009. – С. 157–163.

8. Петрова Н. П. Сравнительный анализ математических моделей лингвистики и особенности разработки языков представления знаний / Н. П. Петрова // Материалы XII науч. конф. МГТУ «Станкин» и «Учебно-научного центра математического моделирования МГТУ «Станкин» – ИММ РАН» по математическому моделированию и информатике. – М. : МГТУ «Станкин», 2009. – С. 143–146.

Поступила 20.10.10.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ СПИРАЛЬНОГО ТЕЛА НАКАЛА

Г. А. Курпосов, О. В. Пескова

Максимальное динамическое воздействие на тело накала специальных ламп оказывается при динамических явлениях. Знание собственных (резонансных) частот тела накала различной формы обеспечивает получение тепловых источников оптического излучения специального назначения, более надежных в эксплуатации. Исследование частот собственных колебаний тела накала производилось методом вычислительного эксперимента путем варьирования геометрических параметров.

Как известно, метод вычислительного эксперимента состоит из 5 этапов: построение модели исследуемого объекта; разработка метода расчета сформировавшей математической задачи; создание программы для реализации разработанного алгоритма на ПЭВМ; проведение компьютерных расчетов; обработка результатов расчета [5].

При исследовании колебаний тела накала широко применяется модель «эквивалентного бруса». Она заключается в том, что тело накала как тонкий криволинейный стержень двойной кривизны заменяется неким упругим бруском такой же длины и той же погонной массы, с теми же самыми жесткостями поперечного сечения (сдвиговой, изгибной, продольной и др.). Граничные условия на концах «эквивалентного бруса» соответствуют способу крепления тела накала к электродам.

Во время эксплуатации специальных ламп изгибные колебания являются наиболее опасными для целостности тела накала по сравнению с другими видами колебаний (продольных, крутильных).

В согласии с гипотезой Фойгта дифференциальное уравнение изгибных колебаний тела накала при действии внутреннего трения имеет вид [6]

$$\alpha_f \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x^4} + h \frac{\partial^5 U(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + m \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $U(x, t)$ – отклонение упругой оси тела накала от статического положения равновесия; α_f – жесткость на изгиб; h – коэффициент, учитывающий внутреннее трение материала; m – погонная масса тела накала.

Жесткому креплению тела накала соответствуют граничные условия, имеющие вид ($L_{\text{тн}}$ – длина спирали):

$$U(0, t) = U(L_{\text{тн}}, t) = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{(0, t)} = \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{(L_{\text{тн}}, t)} = 0.$$

© Г. А. Курпосов, О. В. Пескова, 2010

Для того чтобы обезопасить спиральное тело накала от возможного разрушения при вынужденных колебаниях лампы во время эксплуатации, необходимо первую частоту сделать максимально большей (идеальным является достижение 2 000 Гц и более [3]). Тем самым бесконечный спектр частот смещается вправо, и число резонансных частот уменьшается. Этого можно добиться путем изменения конструктивных параметров тела накала, косвенно влияющих на значение жесткости на изгиб (α_f) и погонной массы (m).

Величина жесткости моноспирального тела накала выражается формулой

$$\alpha_f = (E \cdot I)_M,$$

где $I = \frac{\pi d^4}{64}$ – экваториальный момент инерции поперечного сечения проволоки, из которой изготовлено тело накала; E – модуль Юнга.

Тогда величина жесткости биспирального тела накала выражается формулой

$$\alpha_f = (E \cdot I)_B = \frac{2(E \cdot I)_M \sin(\beta_M)}{2 + \mu \cos^2 \beta_B + \frac{\mu \cos^2 \beta_B}{4\pi N_B} \sin(4\pi N_B)},$$

где β_B – угол навивки биспирали; μ – коэффициент Пуассона; N_B – число витков биспирали.

Масса тела накала определяется формулой

$$M = \rho \frac{\pi d^2}{4} l,$$

где ρ – плотность вольфрама; d – диаметр проволоки; l – длина проволоки. Тогда погонная масса биспирали будет вычисляться по формуле

$$m = m_B = \frac{M}{L_B},$$

где L_B – длина биспирали.

Частота исследуемых изгибных колебаний вычисляется по формуле

$$\nu_{f_n} = \frac{\omega_{f_n}}{2\pi},$$

ω_{f_n} – круговая частота, причем

$$\omega_{f_n} = \frac{\lambda_n^2}{2m} \sqrt{4\alpha_f m - \hbar^2 \lambda_n^4}.$$

Здесь $\lambda_n = \frac{r_n}{L_{\text{тн}}}$ – собственные числа ($n = 1, 2, 3, \dots$), где $r = r_n$ вычисляются из характеристического уравнения $\cos r \times \operatorname{sh} r = 1$ с любой, необходимой для практических приложений точностью [4]. Например, в [1] приведены следующие значения корней

$$r_1 = 4,7300, \quad r_2 = 7,8532,$$

$$r_n = \frac{(2n+1)}{2}\pi \text{ при } n > 2.$$

Математическая модель изгибных колебаний (1)–(2) основывается на гипотезе Фойгта о внутреннем трении материала и справедлива для первой частоты колебаний ($n = 1$). Поэтому исследование остальных частот спектра колебаний является нецелесообразным.

Объектом исследования служила специальная лампа типа А24-3, биспиральное тело которой имеет следующие основные геометрические параметры: длина тела накала $L_{\text{тн}} = 5,4$ мм; диаметр вольфрамовой проволоки $d = 0,0355$ мм; средний диаметр моноспиралы $D_{\text{ср,М}} = 0,08$; число витков моноспиралы $N_{\text{М}} = 562$; средний диаметр биспиралы $D_{\text{ср,Б}} = 0,3$ мм; число витков биспиралы $N_{\text{Б}} = 23$.

Варьировались значения диаметра сердечника моноспиралы и диаметра сердечника биспиралы. Последовательные диаметры молибденовых сердечников из [2] выбирались таким образом, чтобы их номинальные значения падалились в центре вариационного ряда, т. е. под 6-м номером при 11 элементах вариационного ряда. Результаты вычислений представлены в таблицах 1–3.

Таблица 1
Изыбыме колебания «столонного» тела изгиба лампы А 24-3

Диаметр сердечника биспирали, мм	Внешний диаметр биспирали, мм	Диаметр сердечника мениспиралл, мм												
		0,075	0,076	0,077	0,078	0,079	0,080	0,081	0,082	0,083	0,084	0,085		
0,25	0,542	108	107	106	105	104	103	102	101	100	100	99		
0,26	0,554	108	107	106	105	104	103	102	101	100	100	99		
0,27	0,566	107	107	106	105	104	103	102	101	100	100	99		
0,28	0,578	107	106	106	105	104	103	102	101	100	99	99		
0,29	0,590	107	106	105	105	104	103	102	101	100	99	99		
0,30	0,602	107	106	105	105	104	103	102	101	100	99	99		
0,31	0,614	107	106	105	104	104	103	102	101	100	99	98		
0,32	0,626	107	106	105	104	104	103	102	101	100	99	98		
0,33	0,638	107	106	105	104	103	103	102	101	100	99	98		
0,34	0,650	107	106	105	104	103	103	102	101	100	99	98		
0,35	0,662	107	106	105	104	103	102	102	101	100	99	98		

Таблица 2
Световой поток лампы А24-3

Диаметр сердечника биспирали, мм	Внешний диаметр биспирали, мм	Диаметр сердечника моноспирали, мм												
		0,075	0,076	0,077	0,078	0,079	0,080	0,081	0,082	0,083	0,084	0,085		
0,25	0,542	17,2	16,7	16,3	15,8	15,3	14,9	14,6	14,3	14,0	13,8	13,5		
0,26	0,554	17,0	16,5	16,0	15,5	15,1	14,7	14,5	14,2	13,9	13,6	13,4		
0,27	0,566	16,7	16,2	15,8	15,3	14,9	14,6	14,3	14,1	13,8	13,5	13,2		
0,28	0,578	16,5	16,0	15,5	15,1	14,8	14,5	14,2	14,0	13,7	13,4	13,1		
0,29	0,590	16,3	15,8	15,3	15,0	14,7	14,4	14,1	13,8	13,6	13,3	13,0		
0,30	0,602	16,0	15,5	15,2	14,9	14,6	14,3	14,0	13,7	13,4	13,1	12,9		
0,31	0,614	15,8	15,4	15,1	14,8	14,5	14,2	13,9	13,6	13,3	13,0	12,7		
0,32	0,626	15,6	15,3	15,0	14,7	14,4	14,1	13,8	13,5	13,2	12,9	12,6		
0,33	0,638	15,5	15,2	14,9	14,6	14,3	14,0	13,7	13,4	13,1	12,8	12,5		
0,34	0,650	15,4	15,1	14,8	14,5	14,2	13,9	13,6	13,3	13,0	12,7	12,4		
0,35	0,662	15,3	15,0	14,7	14,4	14,1	13,8	13,5	13,2	12,9	12,6	12,2		

Таблица 3
Состояние отбора аллелы A24-9

Диаметр сердечника биспирали, мм	Внешний диаметр биспирали, мм	Диаметр сердечника моноспирали, мм													
		0,075	0,076	0,077	0,078	0,079	0,080	0,081	0,082	0,083	0,084	0,085			
0,25	0,542	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,2	3,1	3,1	3,1	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0
0,26	0,554	3,5	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,9	2,9
0,27	0,566	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,9	2,9	2,9
0,28	0,578	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,8	2,8
0,29	0,590	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,8	2,8
0,30	0,602	3,3	3,2	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8
0,31	0,614	3,3	3,2	3,1	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8
0,32	0,626	3,2	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	2,7
0,33	0,638	3,2	3,1	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	2,7
0,34	0,650	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7
0,35	0,662	3,1	3,1	3,0	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7

Выводы:

1. Если заданы предельные габаритные размеры тела накала (длина $L_{\text{в}} = L_{\text{тн}}$ и внешний диаметр биспирали $D_{\text{в}}$), то вычисленная наибольшая частота собственных изгибных (т. е. резонансных) колебаний наблюдается при наименьшем диаметре сердечника для наливки моноспираль ($D_{\text{с,м}}$) и наименьшем диаметре биспираль ($D_{\text{с,б}}$).

2. При тех значениях $D_{\text{с,м}}$ и $D_{\text{с,б}}$ рассчитанные световая отдача $\eta = 3,6$ лм/Вт и световой поток $\Phi = 17,2$ лм являются наибольшими.

3. При других ограничениях на геометрию биспирального тела накала или на важнейшие световые параметры лампы исследование резонансных частот производится аналогичным образом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. — 2-е изд., перераб. — М. : Наука, 1965. — 560 с.
2. ГОСТ 18905-73. Проволока молибденовая. Сортамент.
3. Дижур М. М. Исследование эксплуатационной надежности автомобильных ламп : автореф. дис. ... канд. техн. наук / М. М. Дижур. — М., 1966. — 25 с.
4. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин / Дж. Н. Ланс. — М. : ИЛ, 1962. — 208 с.
5. Самарский А. А. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1988. — С. 28-39.
6. Филипов А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филипов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Машиностроение, 1970. — 734 с.

Поступила 03.11.10.

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ ХРАНЕНИЯ И ПОИСКА РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ФРАКТАЛЬНОГО И СМЕШАННОГО ПОДХОДА

А. В. Савкина

Представленные в статье исследования направлены на разработку системы хранения, реализации методов анализа и поиска изображений на основании визуальных атрибутов, связанных с проблематикой автоматического понимания визуальной информации с использованием методов вейвлет-преобразования, фрактального кодирования и их смешанной реализации.

На сегодняшний день актуальной проблемой является обеспечение эффективного доступа к информации в электронных коллекциях изображений. Традиционным является поиск визуальной информации, опирающийся на индексирование текстовых описаний, ассоциированных с изображением. Неоднозначность соответствия между визуальным содержанием и текстовым описанием снижает показатели точности и полноты поиска.

В связи с этим возникает проблема организации доступа к современным электронным коллекциям изображений с использованием комплекса средств, включая как текстовые описания, так и характеристики визуального содержания, типа цветовой гаммы и более сложных, связанных с распознаванием образов. Текстовое описание и визуальная поисковая информация, как правило, дополняют друг друга, обеспечивая возможность разнонаправленного поиска. Запрос в этом случае может формулироваться в виде набора слов, возможно с указанием соответствующего контекста, или в терминах визуальных характеристик, или представлять собой комбинацию поисковых слов и определения визуального содержания.

Поиск может выполняться итеративно: сначала поиск на основе ключевых слов, как более быстрый способ, затем среди отобранного множества материалов – более трудоемкий поиск с использованием визуальных характеристик.

Методы распознавания образов в настоящее время из-за отсутствия эффективных

универсальных алгоритмов применяются только в узких предметных областях. Современная универсальная технология доступа к коллекциям изображений по визуальному содержанию связана с сопоставлением изображению набора визуальных примитивов (характеристик цвета, формы, текстуры, а для видео еще и параметров движения сцены и объектов) и определением количественной оценки близости изображений по значениям примитивов.

В статье представлена реализация обработки запросов изображений из базы данных с помощью обобщенной теории вейвлетов, по которой вейвлеты конструируются в явном виде на ограниченных областях и непосредственно связаны с кратномасштабным анализом сигналов. Применяя теорию вейвлетов, важно учитывать, что вейвлет-преобразование обладает следующими особенностями:

- вейвлет-разложения с небольшим количеством коэффициентов дают хорошее приближение исходного изображения. Как правило, используются только вейвлет-коэффициенты, имеющие наибольшие величины. Это свойство позволяет ограничить анализ относительно небольшим объемом данных;

- вейвлет-разложения можно использовать для извлечения и кодирования информации о контурах изображения. Контур изображения можно отнести к основным характеристикам изображения;

- коэффициенты вейвлет-разложения обеспечивают информацию, не зависящую

© А. В. Савкина, 2010

от разрешения исходного изображения. Следовательно, схема на основе вейвлетов обеспечивает эффективный анализ вне зависимости от качества изображения;

– вейвлет-разложение вычисляется легко и быстро, программа для выполнения разложения компактная и время ее выполнения линейно зависит от размера изображения.

Для поиска изображений применяется нестандартное двумерное вейвлет-преобразование, что позволяет максимально быстро вычислять искомые коэффициенты. Для изображения размером $N \times N$ пикселей, таким образом, потребуется $8/3(N^2 - 1)$ операций, в то время как для стандартного разложения – $4(N^2 - N)$ [2].

Нестандартное разложение представляет чередование операций над строками и столбцами. Сначала выполняется один этап горизонтального попарного усреднения и нахождения разности значений пикселей в каждой строке изображения, затем – к каждому полученному столбцу. Этот процесс рекурсивно повторяется только на квадрантах, содержащих средние значения в обоих направлениях. В результате исследования применимости различных вейвлет-разложений к задаче поиска изображения по изображению-запросу будет использоваться вейвлет Хаара по следующим причинам:

– простота вейвлета и, соответственно, возможность эффективной реализации алгоритма разложения изображения;

– достаточная точность представления изображения для задачи поиска;

– возможность использования небольшого количества коэффициентов для анализа;

– возможность применения нестандартного разложения.

Для получения вейвлет-коэффициентов используется кратномасштабное разложение изображения с применением базисной функции Хаара:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1; \\ 0, & t < 0, t > 1. \end{cases} \quad (1)$$

С помощью масштабирующей функции, которая представляет собой характеристическую функцию полуинтервала $[0, 1)$:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1; \\ 0, & t < 0, t > 1, \end{cases} \quad (2)$$

строится последовательность приближений для изображения, при котором каждое приближение будет отличаться от соседнего масштабным фактором, равного двум.

Использование масштабирующей функции (2) позволяет получить представление вейвлет-коэффициентов в виде:

$$f(t) = \sum_k \alpha_k \varphi_{j,k}(t), \quad (3)$$

где α_k – коэффициенты разложения, которые являются значениями пикселей изображения; индекс k определяет положение функции $\varphi_{j,k}(t)$ на оси t ; индекс j – ширину функции $\varphi_{j,k}(t)$ вдоль оси t [1].

Структура изображения будет определяться как набор коэффициентов $f(t)$, являющихся результатом кратномасштабного разложения. Используя эти наборы коэффициентов, относящихся к изображению-запросу Q и изображению, хранящему в базе данных J , выбирается линейная метрика сравнения изображений

$$|Q - J|_1 = \sum_{i,j} |Q[i,j] - J[i,j]|, \quad (4)$$

затем она минимизируется, для того чтобы выполнить поиск наиболее близкого по структуре к запросу изображения.

Таким образом, вейвлеты как математическое средство для иерархического представления функций позволяют описать изображение в терминах грубого усредненного приближения и деталей различного масштаба, поэтому понимание изображений как источника информации будет далеко не полным. Алгоритм формирования поиска изображения методом вейвлет-преобразования можно описать следующим образом: на предварительном этапе выполняется нестандартное двумерное вейвлет-разложение каждого изображения в базе данных и сохраняются общее среднее значение цвета, а также индексы и знаки, принадлежащие коэффициентам с наибольшими значениями. Затем для всех изображений базы данных эти индексы объединяются в одну структуру данных, которая оптимизирует поиск.

Далее выполняется такое же вейвлет-разложение для каждого изображения-запроса и вновь отбрасывается вся информация, за исключением среднего значения цвета и самых больших коэффициентов. На основе этой информации строится метрика изображения из базы данных J и метрика

изображения-запроса Q . Затем путем сравнения метрик (4) находится количественный показатель для каждого целеного изображения.

В результате варьирования количества максимальных коэффициентов, процентного количества точек и значения погрешности метрики производится анализ поиска изображений.

В отличие от методов вейвлет-преобразования фрактальные методы учитывают взаимоотношения между фрагментами изображения и являются новым направлением в исследовании изображений. При фрактальном кодировании изображений находится множество сжимающих преобразований, которые отображают доменные блоки во множество ранговых блоков, покрывающих изображение. Ранговые блоки могут быть, в частности, одинакового размера, но чаще используется адаптивное преобразование с переменным размером блоков. Ранговые блоки являются результатом разбиения методом квадродерева. Разбиение методом квадродерева начинается с грубого разбиения. Если для какого-то рангового блока оказывается невозможным подобрать подходящий домен и преобразование, то этот блок разбивается на четыре меньших блока. Процесс разбиения продолжается, пока либо не находится подходящий домен, либо не достигается максимальная глубина квадродерева.

Если изображение-запрос Q размера $N \times N$, принадлежит пространству цифровых изображений в градациях серого и $\{R_1, \dots, R_M\}$ – набор ранговых блоков, на которые разбито изображение Q (например, результат разбиения методом квадродерева). Каждый блок R_i имеет размеры $r_i \times r_i$, его левый нижний угол расположен в точке n_i, m_i в Q . Пусть Q_i – это изображение $N \times N$, целиком заполненное нулями, за исключением блока R_i , так что $Q_i = (B_{n_i, m_i}^{r_i})^*(R_i)$. Тогда $Q = \sum_{i=1}^M Q_i = \sum_{i=1}^M (B_{n_i, m_i}^{r_i})^*(R_i)$. Изображение Q может быть представлено в виде суммы изображений $Q_1, \dots, Q_M$. Если ранговый блок R_i – это результат фрактального кодирования изображения Q , тогда для каждого рангового блока R_i существует доменный блок D_i и аффинное преобразование T_i , так что $R_i = T_i(D_i) = A_i(D_i) + C_i$. Обозначим d_i – размерность домена D_i , а k_i, l_i – координаты левого нижнего угла домена D_i . Таким образом, A_i представляет собой оператор, который сжимает (считаем, что $d_i > r_i$, пре-

образует $(k_i, l_i) \rightarrow (n_i, m_i)$ и применяет коэффициент сжатия s_i , тогда как C_i – это постоянная матрица размером $r_i \times r_i$, представляющая смещение яркости. Домен D_i можно записать как $D_i = (B_{k_i, l_i}^{d_i})^*(Q)$. Используя запись оператора извлечения блока $k \times k$ из изображения $N \times N$, можно получить следующую приближенную запись [3]:

$$\begin{aligned} Q &\approx \sum_{i=1}^M (B_{n_i, m_i}^{r_i})^* \{A_i(B_{k_i, l_i}^{d_i}(Q)) + C_i\} = \\ &= \sum_{i=1}^M (B_{n_i, m_i}^{r_i})^* \{A_i(B_{k_i, l_i}^{d_i}(Q)) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^M (B_{n_i, m_i}^{r_i})^*(C_i)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае фрактального кодирования изображений предлагается следующий базовый алгоритм:

- изображение разбивается на перекрывающиеся ранговые блоки, используются квадратные блоки. Эти блоки могут быть как равными, так и с переменным размером, что дает возможность плотно заполнять ранговыми блоками маленького размера части изображения, содержащие мелкие детали;
- изображение покрывается последовательностью доменных блоков;
- для каждого рангового блока находят домен и соответствующее преобразование, которое наилучшим образом покрывает ранговый блок. Обычно это аффинное преобразование: поворот, зеркальное отражение, сжатие, растяжение. Настраиваются параметры преобразования, такие как контрастность и яркость для их наилучшего соответствия. Если достаточно точного соответствия не получилось, то ранговые блоки разбиваются на меньшие. Процесс продолжается до тех пор, пока не получится приемлемого соответствия или пока размер ранговых блоков не достигнет некоторого заранее определенного предела. Процесс завершается, когда все ранговые блоки оказываются покрытыми. Такой алгоритм необходимо применять для каждого канала палитры RGB.

«Код» закодированного фрактальным методом изображения – это список, содержащий сведения о каждом ранговом блоке, а именно: расположение рангового блока, домен (определяется при помощи индекса и отображается в этот ранговый блок), параметры, описывающие преобразование доменного блока в ранговый.

Задача поиска изображения сводится к задаче сравнения двух изображений. Так как у всех загруженных в базу данных изображений сформированы коэффициенты, значит для изображения, по которому осуществляется поиск, необходимо найти коэффициенты, т. е. к изображению-образцу применить функцию фрактального кодирования. Полученные таким образом фрактальные коэффициенты сравниваются.

В статье анализируется только само квадродрево, остальные фрактальные коэффициенты в сравнении не принимают участия, так как не являются информативными и их анализ требует большого количества времени.

Для сравнения фрактального квадродерева необходимо:

- выполнить преобразование образа, чтобы получить квадродрево;
- поочередно загружать квадродрево каждого изображения из базы данных для его сравнения с квадродеревом образца;
- сравнивать массивы индексов квадродерева. Если какой-нибудь элемент массива образца не равен элементу массива загруженного изображения, значит, какие-то ветки квадродерева не совпали, т. е. на одном дереве разбиение по ветке прекратилось, а на другом еще нет. Анализируя массив индексов, подсчитывается количество не совпавших разбиений и делится на общее количество веток. Получается процент совпадения этих деревьев;
- добавлять это изображение в список найденных, если процент совпадения велик.

Метод доменно-рышного сопоставления, который является основой большинства фрактальных методов, далеко не оптимальным образом воплощает теорию фрактального представления изображений. С одной стороны, самоподобие при любом масштабе – определяющее свойство фракталов, с другой – вейвлеты, с их способностью выделять

информацию, зависящую от масштаба, являются естественным инструментом анализа фракталов, поэтому большой интерес представляет комбинирование вейвлет- и фрактальных методов поиска изображений.

Идея, лежащая в основе большинства смешанных фрактально-вейвлетных методов кодирования, состоит в применении к изображению вейвлет-преобразования с последующим применением фрактальных методов к вейвлет-образу изображения.

Известно, что основная часть информации об изображении при вейвлет-кодировании концентрируется в небольшом числе коэффициентов преобразования. Стандартный фрактальный алгоритм не обеспечивает достаточную точность кодирования значимой информации в левом верхнем углу массива вейвлет-преобразования, поэтому для анализа изображений методом фрактального кодирования берется правый нижний угол.

Для реализации смешанного алгоритма применяется кратномасштабное разложение изображения. С использованием базисной и масштабирующей функций Хаара строится последовательность приближений для изображения. К полученным с помощью вейвлет-преобразования уточняющим коэффициентам сначала применяется базовый алгоритм фрактального кодирования изображений, затем алгоритм сравнения фрактального квадродерева.

Для обеспечения эффективного содержательного доступа к релевантной информации в электронных коллекциях изображений была разработана структура базы данных, показанная на рис. 1.

Для осуществления поиска изображений разработана система, содержащая различные подходы, включая описанные выше методы вейвлет-преобразования, фрактального кодирования и смешанного алгоритма.

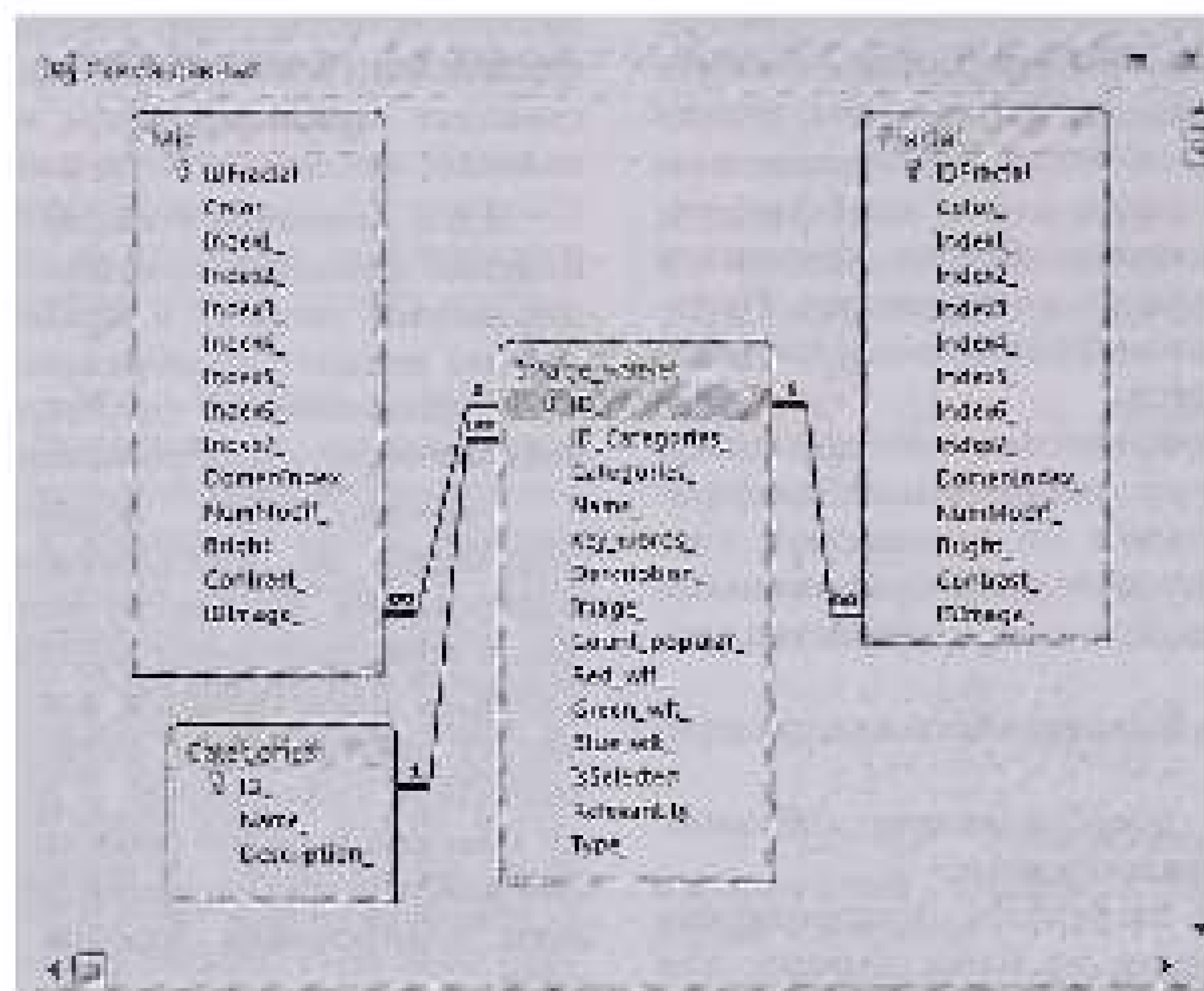


Рис. 1. Структура базы данных

На рис. 2 представлены: слева – пример изображения, в соответствующее ему вейвлет-преобразование Хаара – справа. Пре-

образованное изображение формируется путем приравнивания ненулевых коэффициентов к белому цвету.

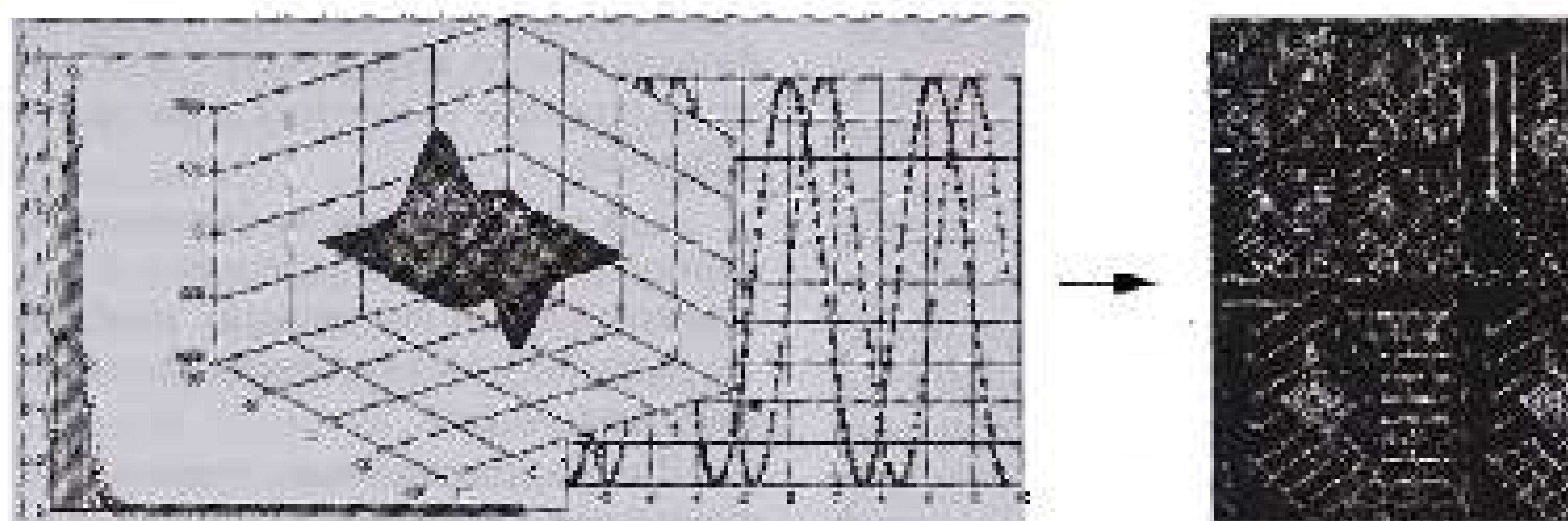


Рис. 2. Пример изображения и его двумерного вейвлет-преобразования

В разработанной системе используются описанные выше алгоритмы разбиения методом квадродерева путем сложения за ранговыми блоками, получающимися в результате разбиения, при ко-

тором каждому ранговому блоку единственным образом сопоставляется индекс в квадродереве. На рис. 3 представлено разбиение изображения методом квадродерева.

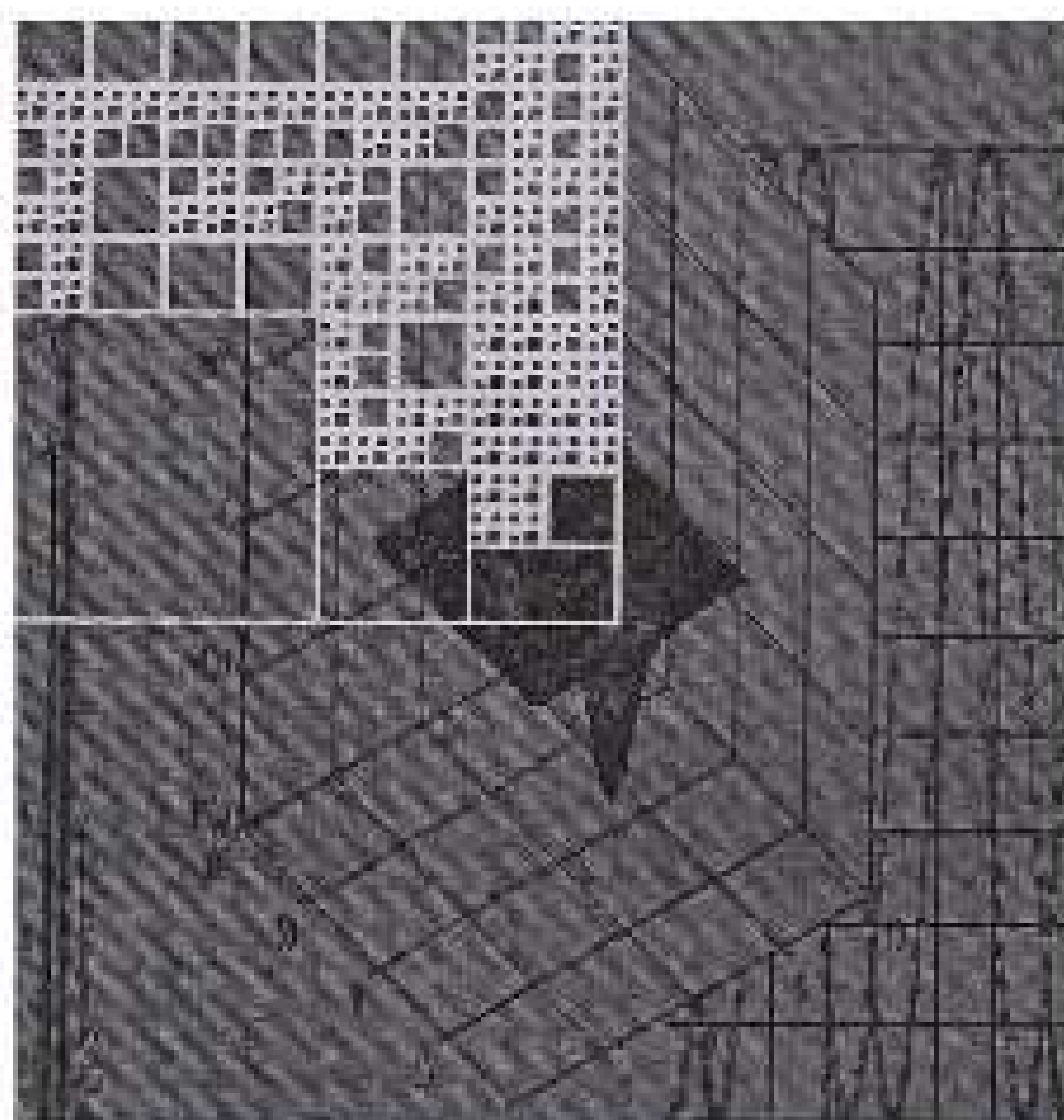


Рис. 3. Разбиение изображения методом квадродерева

В результате комбинирования вейвлет-преобразования и фрактального кодирования для представления различных изображений удастся уменьшить количество хранящихся коэффициентов в среднем в 2 раза.

На рис. 4 приводятся средние данные о количестве коэффициентов при фрактальном кодировании и смешанном подходе в зависимости от категории изображения.

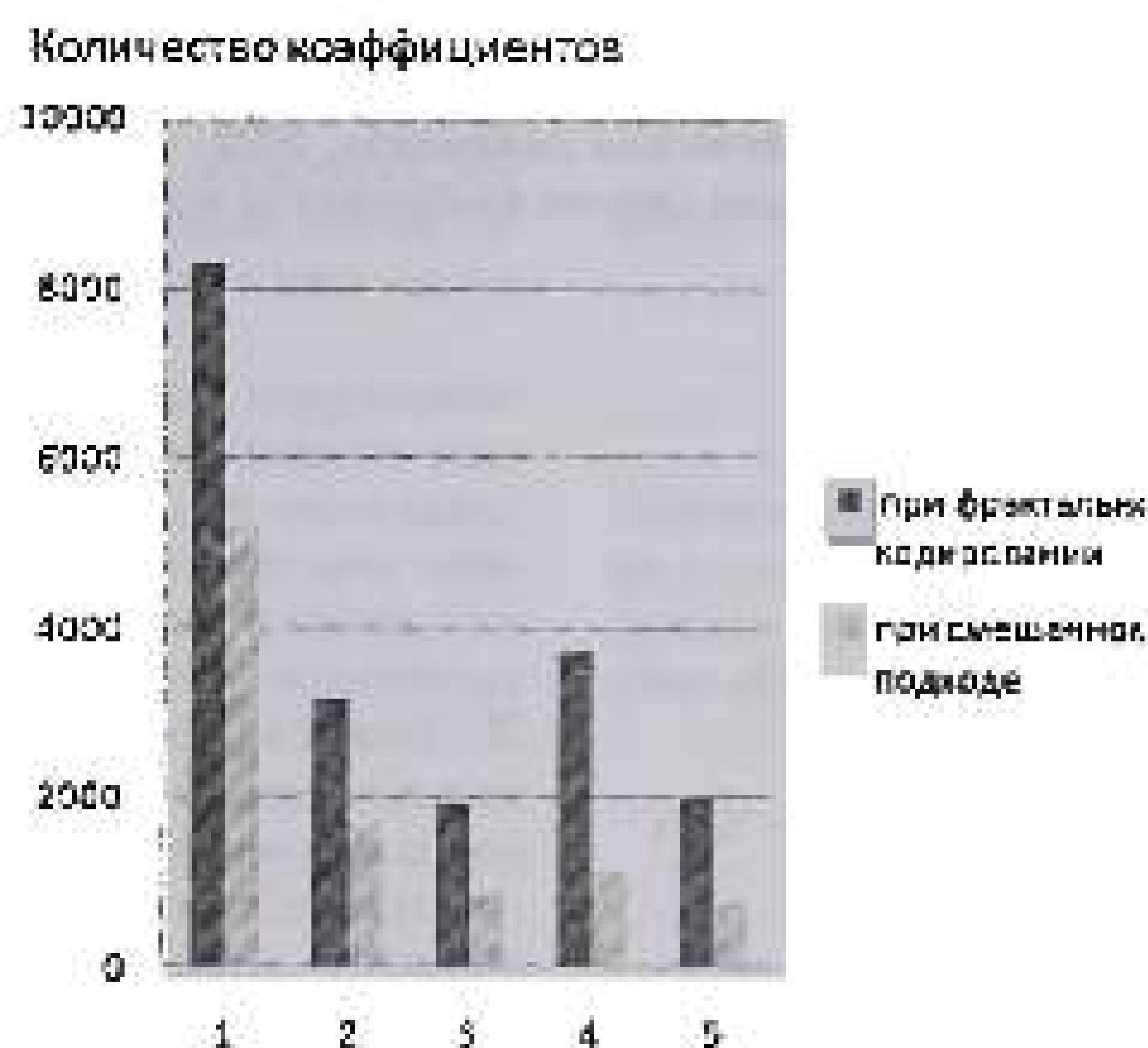


Рис. 4. График количества коэффициентов при фрактальном кодировании и смешанном подходе

Как показали исследования, наиболее быстрым является поиск по изображению с помощью вейвлетов, но не всегда он является корректным. В частности, изображение находится корректно, если образец отличается от искомого некоторыми свойствами, такими как размер, яркость, контрастность, небольшая зашумленность, незначительное изменение цветов, размытие, поиск по нега-

тиву, а также поиск по черно-белому изображению. Наилучший результат поиска изображений дает поиск по изображению фракталами, в то время как смешанная реализация дает значительный выигрыш по времени со средними показателями поиска, наименьшее затраченное время на поиск похожих изображений уходит при использовании вейвлет-преобразования (рис. 5).

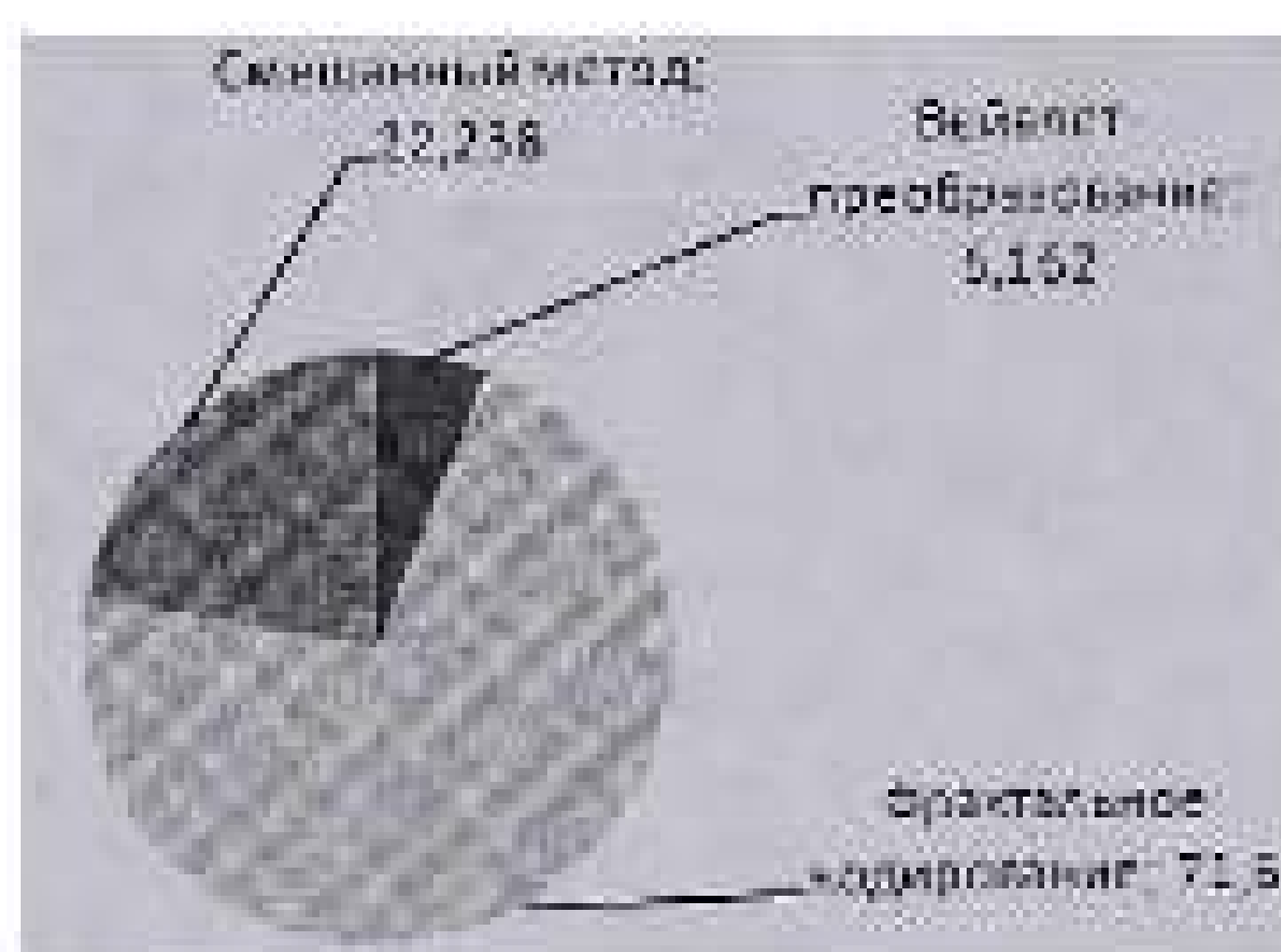


Рис. 5. Процентное соотношение по времени поиска изображений различными методами

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2005. – 1072 с.
2. Столниц Э. Вейвлеты в компьютерной графике / Э. Столниц, Т. Де Роуз, Д. Салтон ; пер. с англ. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 272 с.
3. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображения в действии : учеб. пособие / С. Уэлстид. – М. : Изд-во Триумф, 2003. – 320 с.

Поступила 23.09.16.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ВЫБОРКИ

О. А. Бакаева

В данной статье приведены способы нахождения оптимального объема выборки n для нормального закона распределения, распределения Стьюдента, а также биномиального закона в зависимости от известных параметров этих законов распределения.

В науке часто, чтобы определить какую-либо величину, приходится проводить ряд испытаний. Но бывает так, что и в этом случае истинное значение показателя абсолютно точно измерить не удастся, оно получается с определенной долей погрешности. Исходя из формул доверительного интервала для нормального, биномиального распределения и распределения Стьюдента находится минимальное количество экспериментов, необходимое для получения достоверной информации.

В современных условиях цена эксперимента бывает достаточно высокой как в переносном, так и в прямом смысле. Это может быть связано и с использованием дорогостоящего оборудования, и с оплатой труда специалиста, и непосредственно с затратами на сам опытный процесс. Поэтому задача определения минимального количества экспериментов для получения всей необходимой информации в целях ее последующей обработки является очень актуальной. На языке статистики эта задача сводится к определению минимального объема выборки.

Основная часть классической статистической теории предполагает нормальность распределения изучаемой случайной величины. Но на практике в большинстве случаев приходится сталкиваться с распределением, закон которого близок к одному из известных распределений, но далек от нормального. К наиболее употребительным распределениям можно отнести: непосредственно нормальное распределение и распределение Стьюдента, которые являются непрерывными, а также дискретное – биномиальное распределение. В зависимости от закона распределения и вычисляют необходимый объем выборки – n .

Нормальное распределение. Обычно в статистике решается задача определения

доверительных интервалов, покрывающих параметр α , с надежностью γ и точностью δ , где μ – математическое ожидание нормального распределения.

Пусть параметры распределения таковы: $M(\bar{X}) = \alpha$, $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Потребуем, чтобы выполнялось соотношение $P(|\bar{X} - \alpha| < \delta) = \gamma$, где γ – заданная надежность, получим $P(|X - \alpha| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, заменив X на $\bar{X}$ и σ на $\sigma(\bar{X}) = \frac{\delta}{\sigma}$. Тогда

$$P(|\bar{X} - \alpha| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t), \quad (1)$$

где

$$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}. \quad (2)$$

Найдя из последнего равенства $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, имеем право написать

$$P\left(|X - \alpha| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t).$$

Приняв во внимание, что вероятность P задана и равна γ , окончательно имеем (чтобы получить рабочую формулу, выборочную среднюю обозначим за $\bar{x}$)

$$P\left(\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < \alpha < \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma. \quad (3)$$

Смысл полученного отношения таков: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр α ; точность оценки $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$. Число t определяется

© О. А. Бакаева, 2010

из равенства $2\Phi(t) = \gamma$, или $\Phi(t) = \gamma/2$; по таблице функции Лапласа находят аргумент t , которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\gamma/2$ [1].

Если известно математическое соотношение с наперед заданной точностью δ и надежностью γ , то минимальный объем выборки, который обеспечит эту точность, находят по формуле

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2} \quad (*)$$

как следствие равенства $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Учитывая, что характеристиками стандартного нормального распределения являются $\mu = 0$ и $\sigma = 1$, то формула (1) примет вид:

$$P(|\bar{X}| < \delta) = 2\Phi(\delta\sqrt{n}) = 2\Phi(t), \quad (4)$$

где

$$t = \delta\sqrt{n}. \quad (5)$$

Из последнего равенства следует, что минимальный объем выборки будет равен:

$$n = \frac{t^2}{\delta^2}. \quad (**)$$

Также можно использовать аппроксимацию $t \approx 4,91[\alpha^{0,14} - (1 - \alpha)^{0,14}]$. Тогда получаем [2]

$$n = 24,1081 \left\{ \frac{\sigma}{\delta} [\alpha^{0,14} - (1 - \alpha)^{0,14}] \right\}^2$$

Как показывает полученная формула, минимальное число опытов прямо пропорционально квадрату значения t , которое находится по табличным значениям функции Лапласа, $\Phi(t) = \gamma/2$, где γ — это надежность. То есть с увеличением надежности минимальное число элементов увеличивается в параболической зависимости. С другой стороны, минимальное число опытов обратно пропорционально точности, с которой измеряется среднее значение признака. С увеличением δ , т. е. с уменьшением точности, число элементов уменьшается, а с уменьшением δ , т. е. с увеличением точности, число элементов, наоборот, увеличивается.

О применимости формул (*) и (**) относительно общего количества экспериментов речь пойдет ниже.

Известно, что при неограниченном возрастании объема выборки n распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому практически при $n > 30$ можно вместо

распределения Стьюдента пользоваться нормальным распределением. Однако важно, что для малых объемов выборок ($n < 30$), в особенности для малых значений n , замена распределения нормальным приводит к грубым ошибкам, а именно к неоправданному сужению доверительного интервала, т. е. к повышению точности оценки. Например, если $n = 5$ и $\gamma = 0,99$, то пользуясь распределением Стьюдента, имеем $t_\gamma = 4,6$, а используя функцию Лапласа, найдем $t_\gamma = 2,58$, т. е. доверительный интервал в последнем случае окажется более узким, чем найденный по распределению Стьюдента. То обстоятельством, что распределение Стьюдента при малой выборке дает широкий доверительный интервал вовсе не свидетельствует о непригодности метода Стьюдента, а объясняется тем, что малая выборка содержит малую информацию об интересующем нас признаке.

Распределение Стьюдента определяется параметром n — объемом выборки (или числом степеней свободы $k = n - 1$) и не зависит от неизвестных параметров μ и σ ; эта особенность является его большим достоинством.

При достаточно больших значениях n объема выборки выборочная и исправленная дисперсии различаются мало. На практике пользуются исправленной дисперсией, если примерно $n < 30$ (напомним, что именно при небольших размерах выборок и используется распределение Стьюдента, тогда как при $n > 30$ практически любая случайная величина аппроксимируется нормальным распределением).

При неизвестной дисперсии необходимый объем выборки определяется из соотношения

$$\delta = \frac{\epsilon}{\bar{x}} = \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n\bar{x}}}, \quad (6)$$

где t_α — α -квантиль распределения Стьюдента при $f = n$ степенях свободы; s и $\bar{x}$ — выборочные оценки соответственно стандартного отклонения и среднего значения [2].

Необходимые значения $\frac{t_\alpha(n)}{\sqrt{n}}$ рассчитаны и могут быть найдены по таблицам [2, табл. 49].

Определение объема выборки происходит в следующей последовательности. Сначала по заданным величинам $\delta = \frac{\epsilon}{\bar{x}}$ и α и предполагаемому значению коэффициента вариации $v = \frac{s}{\bar{x}}$ находят по таблице значение $\frac{t_\alpha(n)}{\sqrt{n}}$ и по нему определяют искомое значение n . Если

ли для найденного объема выборки n выборочное значение окажется больше предполагавшегося, то эксперимент должен быть продолжен.

Замечание. Если $\alpha = 0,975$, то, как частный случай, из выражения

$$t_{0,975}(n) = 2\sqrt{\frac{n}{n-2}} \quad (7)$$

следует, что объем выборки

$$n = \left(\frac{2s}{\epsilon}\right)^2 + 2. \quad (8)$$

В этом случае по заданной абсолютной ошибке ϵ и предполагаемому стандартному отклонению s может быть непосредственно определен объем необходимой выборки n .

Биномиальное распределение. Пусть производятся независимые испытания с неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Ставится задача найти доверительный интервал для оценки вероятности, в случае биномиального распределения это можно будет сделать с помощью относительной частоты $p = \frac{m}{n}$. Учитывая, что

$$P(|X - \alpha| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \quad (9)$$

и заменив случайную величину X и ее математическое ожидание α соответственно случайной величиной W и ее математическим ожиданием p , получим приближенное (так как относительная частота распределена приблизительно нормально) равенство

$$P(|W - p| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = \gamma, \quad (10)$$

Как известно, для биномиального распределения дисперсия находится по формуле $D(W) = \frac{pq}{n}$, а среднее квадратическое отклонение как квадратный корень из дисперсии $\sigma = \sqrt{D(W)} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$, где $q = 1 - p$ — вероятность не появления события A , тогда подставив данные выражения в формулу (10), получаем:

$$P(|W - p| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma. \quad (11)$$

где

$$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}. \quad (12)$$

Следовательно,

$$P\left(|W - p| < t\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma. \quad (13)$$

Можно выразить точность $\delta = t\sqrt{\frac{pq}{n}}$, откуда минимальный объем выборки, если вероятность p появления события известна, находится по формуле:

$$n = \frac{\sqrt{t^2 pq}}{\delta^2}. \quad (**)$$

где t — значение функции Лапласа. Если вероятность появления события явно не задана, то находим ее из соотношения $p = \frac{m}{n}$, где m — число появления события, а n — число испытаний. Тогда минимальный объем выборки будет

$$n = t^2 \left(\frac{m}{n\delta^2} - \frac{m^2}{n^2\delta^2} \right). \quad (***)$$

Если n достаточно велико и вероятность p не очень близка к нулю и к единице, то можно считать, что относительная частота распределена приблизительно нормально.

Также можно аппроксимировать практически любое распределение нормальным при достаточном объеме выборки. Об этом свидетельствует и Центральная предельная теорема А. М. Ляпунова. Отсюда следует, что практически все статистические распределения должны приближаться к нормальному распределению как к идеальной предельной форме, если только можно располагать достаточно большим числом наблюдений. То есть, если объем выборки > 30 и случайная величина близка к нормальному распределению, то минимальный размер выборки определяется соотношением $n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2}$. А если объем выборки < 30 и дисперсия неизвестна, то исходя из распределения Стюдента и табличных значений $\frac{t_{\alpha}(n)}{\sqrt{n}}$, так как при новых условиях формула (*) не гарантирует того, что полученное число экспериментов будет достаточным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. – 8-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2002. – 479 с.
2. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика / А. И. Кобзарь. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.

Поступила 08.11.10.

О СТРУКТУРЕ ПАКЕТА ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ПРОГРАММ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТРАНСПОРТА*

Н. А. Базеева, Ю. И. Голечков, Е. В. Щенникова

Рассмотрены вопросы математического моделирования транспортных динамических систем. Описаны структура и функциональные возможности соответствующего пакета проблемно-ориентированных программ.

Применение программного обеспечения ПЭВМ для исследования динамических характеристик железнодорожных транспортных средств рассматривалось в работах [1–2; 5] и др. В данной работе представлена структура пакета проблемно-ориентированных программ, предназначенного для математического моделирования транспортных динамических систем более широких классов.

Пусть транспортная динамическая система описывается многомерным матричным дифференциальным уравнением второго порядка

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = Q(t, x, \dot{x}), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

где A , B , C – квадратные матрицы (соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткости); $Q(t, x, \dot{x})$ – заданная нелинейная вектор-функция времени, перемещения и скорости (обобщенная возмущающая сила);

x – вектор обобщенных координат; R^n – евклидово пространство. Такая динамическая система возникает при описании и изучении колебательных процессов летательных аппаратов в воздушном потоке, колебаний корпусов кораблей и подводных лодок при волнении в открытом море, колебаний элементов и узлов подвижного состава железнодорожного и автомобильного транспорта при движении по неровному пути.

Предложенный пакет содержит набор проблемно-ориентированных программ по математическому моделированию движения и оптимизации динамических параметров железнодорожных и автомобильных транспортных средств, а также программу графической иллюстрации полученных результатов, написанные в математической интегрированной среде Maple [3–4]. Здесь же приведены описания, тексты программ и даны указания по их активизации.

© Н. А. Базеева, Ю. И. Голечков, Е. В. Щенникова, 2010

* Работа частично поддержана РФФИ (проект № 10-08-00825-а).

Первой программой является «Программа расчета параметров железнодорожных транспортных средств». Она предназначена для математического моделирования и оптимизации динамических характеристик движения железнодорожных транспортных средств при внешних возмущениях со стороны неровностей железнодорожного пути, заданных аналитическим способом. С помощью упомянутой программы производится расчет собственных частот колебаний, перемещений, скоростей и ускорений перемещений узлов железнодорожных транспортных средств при их движении по заданному профилю неровностей рельсового пути.

Вторая программа – «Программа расчета параметров автомобильных транспортных средств» – предназначена для математического моделирования и исследования параметров автомобильных транспортных средств при их движении по поверхности дороги с различным характером неровностей. Данная программа позволяет вычислять собственные частоты колебаний, линейные и угловые перемещения, скорости и ускорения перемещений элементов автомобильных транспортных средств при их движении в вертикальной плоскости по пути с произвольной последовательностью выступов и впадин.

Третья программа – «Программа графической иллюстрации результатов расчетов параметров колесных транспортных средств» – включает две подпрограммы для каждой из упомянутых выше программ, которые позволяют дать эффективную визуализацию полученных функциональных зависимостей, представленных в табличном виде. Все три программы имеют собственную нумерацию командных строк. Командные строки программ пронумерованы в порядке возрастания.

Указанные программы состоят из вспомогательных подпрограмм, решающих частные задачи, и основной программы. Вспомогательные подпрограммы можно разделить на три группы: модули для ввода данных, для вычислений и для вывода результатов. Исходные данные, кроме программы 3, предварительно должны быть помещены в файлы исходных данных *data* с соответствующей нумерацией. Результаты расчетов выводятся на монитор дисплея и записываются в принимающие файлы, размещенные в папке *result* соответствующей директории, с одними и теми же названиями: *rez_1*, *rez_2*, *rez_3* и *rez_4*. Для программы 3 исходными являются фай-

лы *rez_1*, *rez_2* и *rez_3*. В текстах программ даны комментарии, поясняющие алгоритмы работы программ. В процессе вычислений все комментарии программами опускаются.

«Программа расчета параметров железнодорожных транспортных средств» используется следующим образом:

1) все исходные данные предварительно записываются в файл исходных данных *data*, который включает строки с исходными данными и комментариями, для чего переменной *K* присваивается спецификатор файла исходных данных;

2) в первой строке файла *data* указываются: код печати промежуточных результатов (*kprint*: если *kprint* = 0, то промежуточные результаты не печатаются, в противном случае они выводятся на печать), скорость движения железнодорожного транспортного средства (*veloc*), начальная координата передней оси колесных пар железнодорожных транспортных средств (*x10*), длина рельса (*alp*), амплитуды первой и второй гармоник (*amp1*, *amp2*);

3) во второй строке файла записываются число элементов железнодорожного транспортного средства (*nwt*), для которых производятся расчеты; число (*nter*), показывающее, через сколько шагов интегрирования записываются результаты вычислений; число шагов интегрирования (*ptime*) и шаг интегрирования (*dtime*);

4) в последующих строках размещаются номер твердого тела, масса и момент твердого тела (массив *Amass*);

5) после массива *Amass* построчно вводятся элементы массивов *AL* и *BL* с геометрическими параметрами железнодорожного транспортного средства a_i и b_i ;

6) после массивов *AL* и *BL* построчно вводятся элементы массивов *Astif* и *Adamp*, содержащие коэффициенты жесткостей k_i и демпфирования h_i элементов подвески железнодорожного транспортного средства;

7) затем в файл исходных данных *data* построчно вводятся элементы *Mwt*(*nwt*)-массива. В каждой строке массива *Mwt* содержится номер элемента железнодорожного транспортного средства, для которого в файлы результатов записываются значения искомых параметров;

8) результаты расчета выводятся на экран монитора и записываются в файлы результатов: *rez_1*, *rez_2*, *rez_3* и *rez_4*. В файл *rez_1* записываются величины перемещений элементов подвески железнодорожного

транспортного средства в зависимости от времени, в файл *rez_2* – значения скоростей, в файл *rez_3* – ускорений и в файл *rez_4* – собственные значения и частоты колебаний элементов подвески железнодорожного транспортного средства.

Все исходные данные, необходимые для работы второй программы, должны быть предварительно записаны в файл исходных данных *data*, который включает строки с исходными данными и комментариями, для чего переменной *F* присваивается спецификатор файла исходных данных. Работа со второй программой осуществляется следующим образом:

1) в первой строке файла *data* указываются число точек поверхности пути (*point*), число элементов автомобильного транспортного средства, для которых определяются величины перемещений, скоростей и ускорений (*point*), скорость движения транспортного средства (*veloc*), начальная *x* – координата передней оси транспортного средства на поверхности пути (*x₁₀*);

2) во второй строке указываются код печати промежуточных результатов (*kprint*), начальные давления (*p₁₀*, *p₂₀*), объемы камер (*V₁₀*, *V₂₀*), площади поперечного сечения (*S₁₀*, *S₂₀*) пневмоцилиндров подвески и сцепления водителя, показатель политроны (*kprofil*). Если *kprint* = 0, то промежуточные результаты не печатаются, иначе они выводятся на печать;

3) в третьей строке записывается число, указывающее, через сколько шагов интегрирования записываются результаты вычислений (*ntstep*), число шагов интегрирования (*ntime*) и шаг интегрирования (*dttime*);

4) В каждой последующих строках размещаются номер твердого тела, его масса и момент инерции (*Atmasse*). После массива *Atmasse* построчно вводятся элементы массива *AL*. В каждую строку файла записываются номер строки и элемент массива *AL* – геометрические параметры *a* автомобильного транспортного средства;

5) после массива *AL* построчно вводятся элементы массивов *Astif* и *Adamp*. В каждую

строку файла *data* записываются номер строки и соответствующие величины – коэффициенты жесткостей *k_i* и демпфирования *h_i* элементов подвески автомобильного транспортного средства;

6) после массивов *Astif* и *Adamp* построчно вводятся элементы массивов *Xprofil(point)* и *Qprofil(point)*. В каждую строку файла записываются номер строки и элементы массивов *Xprofil* и *Qprofil* – координата и высота неровности пути;

7) после массивов *Xprofil* и *Qprofil* построчно вводятся элементы *Marr(narr)* массива. В каждую строку файла записываются номер строки и элемент массива *Marr* с номером элемента автомобильного транспортного средства, для которого определяются значения перемещений, скоростей и ускорений в зависимости от времени;

8) в файле данных *data* между введенными массивами размещаются строки комментариев, в которых указывается название соответствующего массива. При считывании информации из файла данных текстовые строки программой игнорируются.

Результаты расчетов выводятся на экран дисплея и записываются в приписываемые файлы. В файл *rez_1* записываются значения перемещений, в файл *rez_2* – значения скоростей, в файл *rez_3* – ускорений, а в файл *rez_4* – собственные значения и частоты колебаний элементов и узлов автомобильного транспортного средства.

Третья программа включает программные модули для графической иллюстрации расчетов, выполненных с помощью первой и второй программ. Поэтому указанная программа разделена соответственно на две подпрограммы 1 и 2.

Запуск подпрограмм 1 и 2 осуществляется в строках с номерами 1 и 28 соответственно.

В результате вычислений с помощью первой и второй программ можно получить собственные значения и частоты колебаний элементов кинематических схем транспортных динамических систем (табл., файл *rez_4*).

* * * R E Z U L T * * *

Eigen Values and Natural Frequency of Motion:

$Re[1] = -6.478149e + 01$	$Im[1] = 0.000000e - 01$	$frequency[1] = 0.000000e - 01 Hz$
$Re[2] = -1.939186e + 01$	$Im[2] = 5.533237e + 01$	$frequency[2] = 1.183886e + 00 Hz$
$Re[3] = -1.939186e + 01$	$Im[3] = -5.533237e + 01$	$frequency[3] = 1.183886e + 00 Hz$
$Re[4] = -1.277378e + 01$	$Im[4] = 4.739397e + 01$	$frequency[4] = 1.095675e + 00 Hz$
$Re[5] = -1.277378e + 01$	$Im[5] = -4.739397e + 01$	$frequency[5] = 1.095675e + 00 Hz$
$Re[6] = -1.700705e + 00$	$Im[6] = 5.860558e + 00$	$frequency[6] = 3.852917e - 01 Hz$
$Re[7] = -1.700705e + 00$	$Im[7] = -5.860558e + 00$	$frequency[7] = 3.852917e - 01 Hz$
$Re[8] = -1.287373e + 01$	$Im[8] = 0.000000e - 01$	$frequency[8] = 0.000000e - 01 Hz$
$Re[9] = -5.264800e + 00$	$Im[9] = 3.599979e + 01$	$frequency[9] = 9.549268e - 01 Hz$
$Re[10] = -5.264800e + 00$	$Im[10] = -3.599979e + 01$	$frequency[10] = 9.549268e - 01 Hz$
$Re[11] = -9.777437e + 00$	$Im[11] = 3.631197e + 01$	$frequency[11] = 9.590583e - 01 Hz$
$Re[12] = -9.777437e + 00$	$Im[12] = -3.631197e + 01$	$frequency[12] = 9.590583e - 01 Hz$
$Re[13] = -4.871000e - 08$	$Im[13] = 7.071209e + 03$	$frequency[13] = 1.338342e + 01 Hz$
$Re[14] = -4.871000e - 08$	$Im[14] = -7.071209e + 03$	$frequency[14] = 1.338342e + 01 Hz$
$Re[15] = -4.868000e - 08$	$Im[15] = 7.071209e + 03$	$frequency[15] = 1.338342e + 01 Hz$
$Re[16] = -4.868000e - 08$	$Im[16] = -7.071209e + 03$	$frequency[16] = 1.338342e + 01 Hz$
$Re[17] = -6.900000e - 09$	$Im[17] = 7.071209e + 03$	$frequency[17] = 1.338342e + 01 Hz$
$Re[18] = -6.900000e - 09$	$Im[18] = -7.071209e + 03$	$frequency[18] = 1.338342e + 01 Hz$
$Re[19] = -6.840000e - 09$	$Im[19] = 7.071209e + 03$	$frequency[19] = 1.338342e + 01 Hz$
$Re[20] = -6.840000e - 09$	$Im[20] = -7.071209e + 03$	$frequency[20] = 1.338342e + 01 Hz$

Таким образом, разработанный пакет проблемно-ориентированных программ позволяет выполнять моделирование транспортных динамических систем на ПЭВМ, в том числе: 1) вычислять собственные значения и собственные частоты колебаний всех узлов исследуемых транспортных динамических систем; 2) определять устойчивость вертикальных колебаний динамических систем; 3) находить в числовом и графическом виде зависимости перемещений, скоростей и

ускорений обобщенных координат моделируемых динамических систем; 4) по степени изменения величины действительной части собственного значения определять влияние параметров жесткости, демпфирования, инерционных и геометрических параметров на устойчивость колебаний динамических систем. Важно отметить, что разработанный пакет проблемно-ориентированных программ в системе Maple обладает высокой точностью вычислений [3–4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вершинский С. В. Динамика вагона / С. В. Вершинский, В. Н. Давылов, В. Д. Хусидов. – М. : Транспорт, 1991. – 360 с.
2. Голечков Ю. И. Характеристика MAPLE-программы в задаче о движении вагона по неровному рельсовому пути / Ю. И. Голечков, А. А. Шестаков // Математическое моделирование транспортных динамических систем : устойчивость и частотный анализ : межвуз. сб. науч. тр. – М. : РГОТУПС, 2004. – С. 23–26.
3. Дьяконов В. П. Maple7 : учеб. курс / В. П. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2002. – 672 с.
4. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов. – М. : Солон-Пресс, 2006. – 720 с.
5. Шестаков А. А. Устойчивость и безопасность движения транспортных динамических систем / А. А. Шестаков, Ю. И. Голечков // Научные технологии. – 2007. – № 7. – С. 56–60.

Поступила 13.10.10.

РАДИАЦИОННО-ЗАЩИТНЫЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОБЕТОНОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ

Г. А. Лаптев, В. В. Батин

Приводятся результаты расчета радиационно-защитных свойств металлобетонных свинцовой матрицей и различными заполнителями при воздействии рентгеновских лучей. Приводится конструкция защитных экранов.

Поглощение рентгеновских лучей. Поглощающую способность плиток из мусола размерами $40 \times 40 \times 2$ мм с различными напол-

нителями и свинцовой матрицей определяли на рентгеновской установке ДРОН-6 с медным анодом по схеме, показанной на рис. 1.

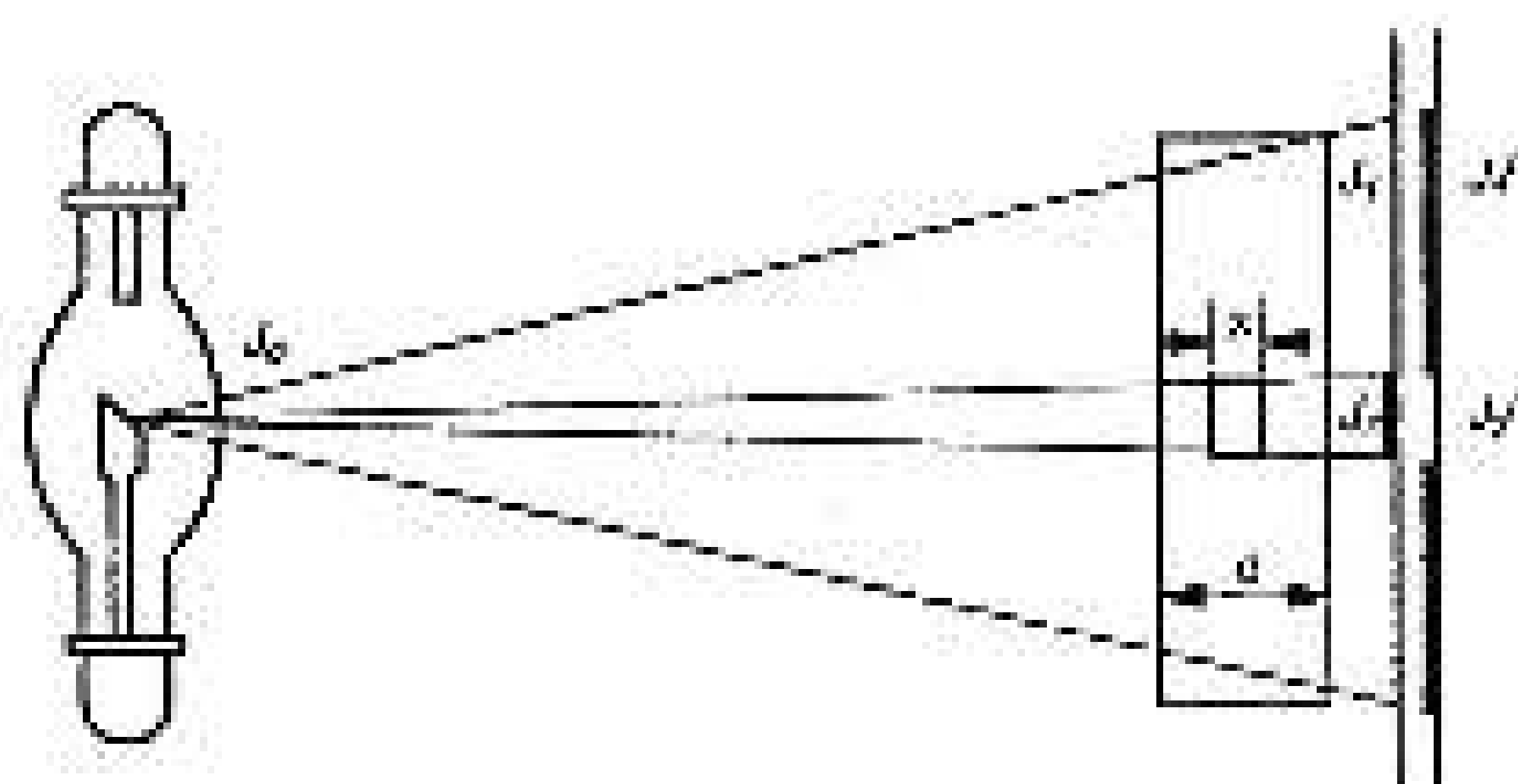


Рис. 1. Схема прохождения рентгеновских лучей через материал

На рис. 1 введены следующие обозначения: J_0 – интенсивность излучения при выходе из рентгеновской трубки; J_1 – интенсивность излучения после прохождения через материал; J_2 – то же после прохождения через частицу заполнителя или дефект; d – толщина образца; x – размер включений.

Рентгеновские лучи, проходя через материал, ослабевают вследствие потери энергии на абсорбцию и рассеяние. Абсорбированная энергия проявляется вновь как вторичное излучение, направление которого отклоняется от направления первичного излучения. Это является причиной рассеяния рентгеновских лучей.

Представим частицу заполнителя как дефект размером X внутри образца толщиной

d . Интенсивность излучения при выходе из рентгеновской трубки J_0 после прохождения через композит обозначим через J . Линейный коэффициент поглощения композита обозначим через μ и запишем следующие зависимости [1]:

$$J = J_0 \cdot e^{-\mu d} \text{ и } \mu = \sum C_i \cdot \rho \cdot \mu_{\text{мас}i},$$

где e – основание натурального логарифма; C_i – весовой процент i -го элемента; ρ – плотность смеси; $\mu_{\text{мас}i}$ – массовый коэффициент поглощения i -го элемента.

В качестве наполнителей по объему использовали: кварцевую муку (SiO_2) с плотностью $2,65 \text{ г/см}^3$; оксид магния (MgO) с плотностью $3,58 \text{ г/см}^3$; карбид бора (B_4C) с плот-

© Г. А. Лаптев, В. В. Батин, 2010

постью $2,519 \text{ г/см}^3$; фарфор ($\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$) с плотностью $2,80 \text{ г/см}^3$; доломит ($\text{CaCO}_3 \cdot \text{MgCO}_3$) с плотностью $2,75 \text{ г/см}^3$; базальт $[\text{Ca}(\text{Mg} \cdot \text{Fe})(\text{Si}_2\text{O}_6)(\text{Mg} \cdot \text{Fe})_2 \cdot 2\text{K}(\text{SiO}_4)]$ с плотностью $3,00 \text{ г/см}^3$ [2]. Наполнитель вводился в количестве 65 %. Результаты испытаний и расчетные данные приведены в таблице.

Таблица
Ослабление рентгеновского излучения в зависимости от толщины металлобетонных образцов

Составы бетонов, % по объему	Ослабление рентгеновского излучения I/I_0 в зависимости от толщины образца, см				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Свинец – 100 %	$3,22 \cdot 10^{-64}$	$1,03 \cdot 10^{-107}$ ($1,02 \cdot 10^{-107}$)	$3,30 \cdot 10^{-161}$	$1,10 \cdot 10^{-214}$	$3,50 \cdot 10^{-269}$
Свинец – 35 %, карбид бора – 65 %	$1,06 \cdot 10^{-19}$	$1,1245 \cdot 10^{-39}$ ($1,12 \cdot 10^{-38}$)	$1,19 \cdot 10^{-57}$	$1,26 \cdot 10^{-78}$	$1,34 \cdot 10^{-95}$
Свинец – 35 %, кварцевый песок – 65 %	$1,38 \cdot 10^{-21}$	$1,9124 \cdot 10^{-43}$ ($1,90 \cdot 10^{-42}$)	$2,64 \cdot 10^{-63}$	$3,65 \cdot 10^{-84}$	$5,05 \cdot 10^{-105}$
Свинец – 35 %, оксид магния – 65 %	$3,84 \cdot 10^{-22}$	$1,4758 \cdot 10^{-43}$ ($1,47 \cdot 10^{-43}$)	$5,66 \cdot 10^{-63}$	$2,17 \cdot 10^{-86}$	$8,36 \cdot 10^{-108}$
Свинец – 35 %, фарфор – 65 %	$5,29 \cdot 10^{-21}$	$2,8079 \cdot 10^{-41}$ ($2,80 \cdot 10^{-41}$)	$1,48 \cdot 10^{-61}$	$7,88 \cdot 10^{-82}$	$4,17 \cdot 10^{-102}$
Свинец – 35 %, базальт – 65 %	$1,04 \cdot 10^{-27}$	$1,0975 \cdot 10^{-54}$ ($1,09 \cdot 10^{-54}$)	$1,14 \cdot 10^{-81}$	$1,20 \cdot 10^{-108}$	$1,26 \cdot 10^{-135}$
Свинец – 35 %, доломит – 65 %	$9,83 \cdot 10^{-22}$	$9,6794 \cdot 10^{-43}$ ($9,65 \cdot 10^{-43}$)	$9,51 \cdot 10^{-64}$	$9,35 \cdot 10^{-85}$	$9,19 \cdot 10^{-105}$
Кварцевый песок – 100 %	$0,516 \cdot 10^{-3}$	$2,660 \cdot 10^{-7}$ ($2,65 \cdot 10^{-7}$)	$1,37 \cdot 10^{-10}$	$7,07 \cdot 10^{-14}$	$3,64 \cdot 10^{-17}$

Примечание. В скобках приводятся экспериментальные данные, полученные для образцов толщиной 0,2 см.

На основании полученных экспериментальных и расчетных данных можно сделать вывод, что введение в свинцовую матрицу наполнителей позволяет получить достаточно эффективные защитные экраны от воздействия рентгеновского излучения.

Но все же по защитным свойствам, в concreto при рентгеновском излучении, исследованные композиты уступают чистому свинцу.

Конструкция защитного экрана от ионизирующих излучений. Как известно, ядерный взрыв или авария на атомных электростанциях приводят к выбросу мощного потока корпускулярных частиц и электромагнитному излучению. Поэтому создание многослойной конструкции является весьма актуальной задачей. Нами разработана многослойная конструкция, состоящая из железобетонной панели, по которой наносится несколько слоев покрытий (рис. 2).

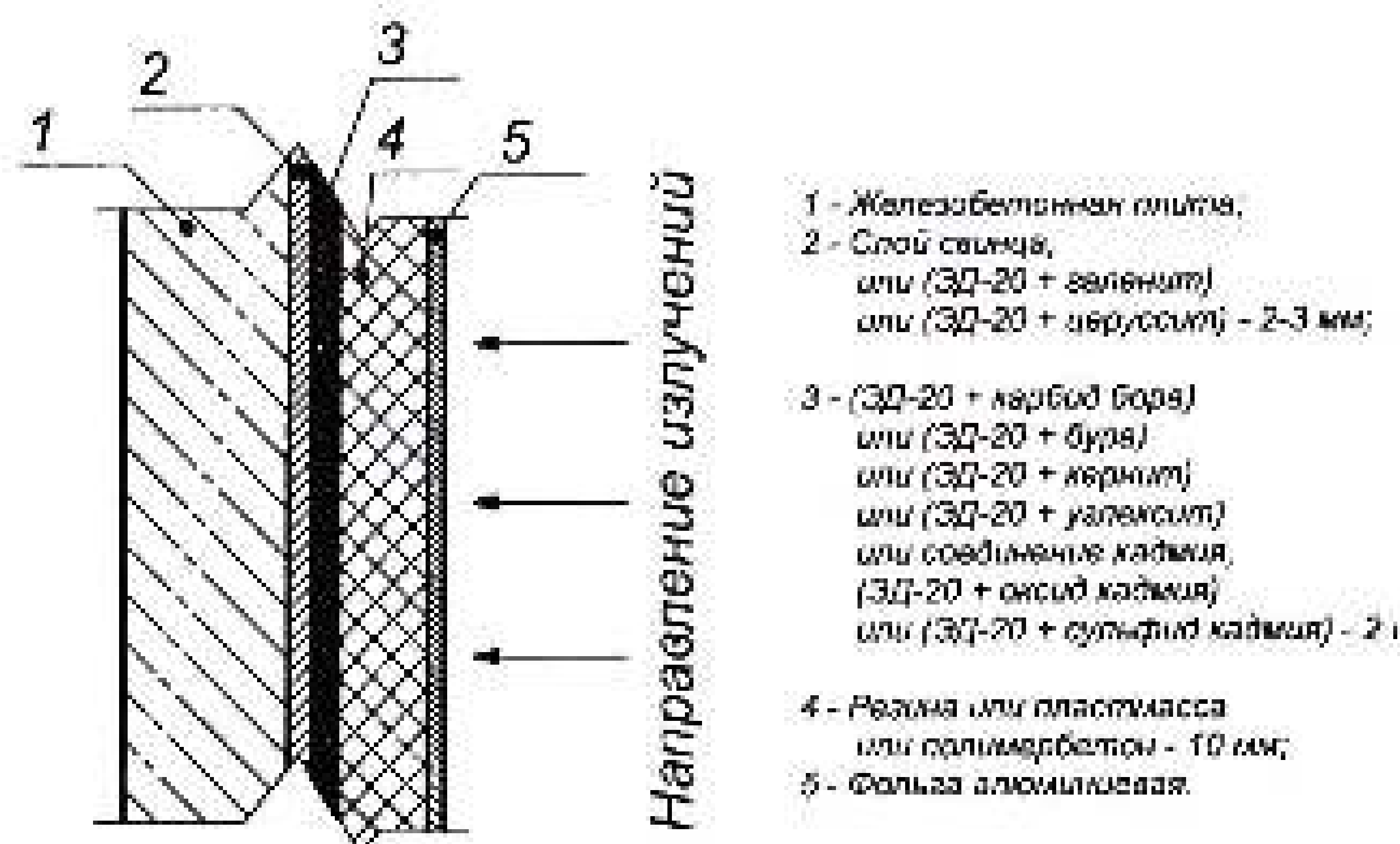


Рис. 2. Конструкция многослойной плиты для защиты от всех видов излучений

Предлагаемая конструкция изготавливается непосредственно на строительной площадке. На находящуюся в горизонтальном положении железобетонную плиту (поз. 1) на эпоксидном растворе (эпоксидная смола ЭД-20 с наполнителем) укладывается слой свинца (поз. 2) или композит (ЭД-20 + галениит) в соотношении 1 : 1. После наносится слой (ЭД-20 + карбид бора) в соотношении 1 : 1 (поз. 3). Затем укладывается эпоксидный полимербетон толщиной 10 мм (поз. 4). Для защиты от ультрафиолетовых лучей и обеспечения долговечности конструкции по клееному слою укладывается алюминиевая фольга.

Работа такой конструкции заключается в следующем. Поток быстрых нейтронов в во-

дородосодержащей среде (слой эпоксидного компаунда) быстро теряет свою энергию до тепловых нейтронов за 18-20 колебаний (поз. 4). Тепловые нейтроны активно поглощаются слоем (ЭД-20 + ^{10}B) (поз. 3). Слой половинного ослабления излучения тепловых нейтронов составляет 0,0126 см, тогда как у металлобетон с кварцевым наполнителем – 162 см, а с базальтовым наполнителем – 59 см. Слой свинца, или ЭД-20 + галениит (поз. 2), активно поглощает рентгеновское и гамма-излучения. Кроме того, вся конструкция активно поглощает альфа- и бета-излучения, а также поток протонов. Слой фольги из алюминия защищает слой 4 от ультрафиолетового излучения солнечных лучей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Справочник по ядерной физике / под ред. Л. А. Арцимовича. – М. : Физматгиз, 1963. – 631 с.
2. Справочник (жадастр) физических свойств горных пород / под ред. Н. В. Мельникова, В. В. Ржевского, К. Л. Протодьяконова. – М. : Недра, 1975. – 279 с.

Поступила 03.11.10.

ОПТИМИЗАЦИЯ СОСТАВОВ НАПОЛНЕННЫХ ЦЕМЕНТНЫХ КОМПОЗИТОВ НА АКТИВИРОВАННОЙ ВОДЕ ЗАТВОРЕНИЯ

А. А. Матвиевский, Д. В. Емельянов, П. В. Юдин

В качестве предмета исследования рассматривались наполненные цементные композиты с применением активированной воды затворения. Приведена постановка эксперимента с применением метода математического планирования и по результатам испытаний получены уравнения регрессии. Выявлены зависимости изменения прочности на сжатие наполненных цементных композитов с применением активированной воды затворения от количественных и качественных характеристик наполнителей.

Исследования методом рентгеноструктурного анализа показали, что характерной особенностью для составов на магнитно- и электрохимически-активированной воде затворения являются увеличение интенсивности линий двукальциевого силиката и уменьшение интенсивности линии трехкальциевого алюмината. В этой связи интерес представляет исследование процессов структурообразования дисперсных наполнителей, различных по составу. Нами в качестве таких наполнителей рассматривались порошки на основе кварца и белозимита (чертов палец). Кварц в основном состоит из оксидов крем-

ния, а белозимит – преимущественно из алюмосиликатов. В цементные пасты наполнители вводились в различных количественных содержаниях и различной дисперсности. С учетом предыдущих исследований при выполнении данного эксперимента в качестве активированной воды использовалась вода, обработанная последовательно магнитным полем и электрическим током силой в 1 А.

Исследования проведены с применением методов математического планирования эксперимента. В качестве матрицы планирования использовали план Коно, состоящий из 9 опытов (табл.).

Таблица
Матрица планирования и рабочая матрица

№ опыта	Матрица планирования		Рабочая матрица	
	X_1	X_2	фракция наполнителя, мм	содержание наполнителя, %
1	+1	+1	0,315–0,63	30
2	–1	+1	< 0,14	30
3	+1	–1	0,315–0,63	10
4	–1	–1	< 0,14	10
5	–1	0	< 0,14	20
6	+1	0	0,315–0,63	20
7	0	–1	0,14–0,315	10
8	0	+1	0,14–0,315	30
9	0	0	0,14–0,315	20

© А. А. Матвиевский, Д. В. Емельянов, П. В. Юдин, 2010

После проведения испытаний и статистической обработки результатов эксперимента получены следующие уравнения регрессии, связывающие зависимости изменения прочности композитов различного возраста от рассматриваемых факторов:

– для композитов, наполненных алюмосиликатным компонентом в возрасте 3-х (R_1), 7-ми (R_2) и 28-ми (R_3) суток:

$$R_1 = 1,142 + 0,027X_1 - 0,160X_2 -$$

$$-0,053X_1^2 + 0,070X_1X_2 + 0,127X_2^2;$$

$$R_2 = 1,039 + 0,005X_1 - 0,005X_2 +$$

$$+0,102X_1^2 + 0,027X_1X_2 - 0,018X_2^2;$$

$$R_3 = 1,086 - 0,012X_1 + 0,003X_2 +$$

$$+0,152X_1^2 + 0,008X_1X_2 + 0,097X_2^2;$$

– для композитов, наполненных кремнеземистым компонентом в возрасте 3-х (R_4), 7-ми (R_5) и 28-ми (R_6) суток:

$$R_4 = 1,033 - 0,003X_1 - 0,030X_2 +$$

$$+0,060X_1^2 + 0,038X_1X_2 - 0,040X_2^2;$$

$$R_5 = 1,109 - 0,008X_1 - 0,067X_2 -$$

$$-0,048X_1^2 + 0,063X_1X_2 + 0,117X_2^2;$$

$$R_6 = 1,100 + 0,002X_1 - 0,039X_2 +$$

$$+0,033X_1^2 + 0,020X_1X_2 - 0,021X_2^2.$$

Графические зависимости изменения прочности цементных композитов в возрасте 3, 7 и 28 суток, построенные после статистической обработки экспериментальных данных, приведены на рис.

Из графических зависимостей можно сделать следующие выводы:

1. В возрасте трех суток твердения количественное содержание кремнеземистого и алюмосиликатного компонентов на прочность влияет по-разному. Увеличение содержания кремнеземистой составляющей в пределах от 10 до 30 % приводит к увеличению прочности композитов в пределах от 5 до 40 %. Введение же алюмосиликатного наполнителя в количестве 10-20 % способствует повышению прочности, а при больших содержаниях – уменьшению. При этом наиболее благоприятным в обоих вариантах является гранулометрический состав наполнителя в пределах от 0,14 до 0,315 мм.

2. В возрасте семи суток твердения влияние кремнеземистого компонента заметно в меньшей степени, чем в ранние сроки. В пределах эксперимента повышение прочности составляет в пределах от 5 до 25 % по сравнению с ненаполненными составами. В случае использования алюмосиликатного компонента влияние наполнителя сказывается в большей степени. Рост прочности составляет от 5 до 30 %. Причем дисперсность наполнителей в пределах принятого ограничения – 0,14-0,63 мм в незначительной степени сказывается на прочности.

3. В возрасте 28 суток твердения влияние наполнителей обоих видов на прочность является также очевидным. Рост прочности наполненных составов выше на 25-30 % по сравнению с ненаполненными.

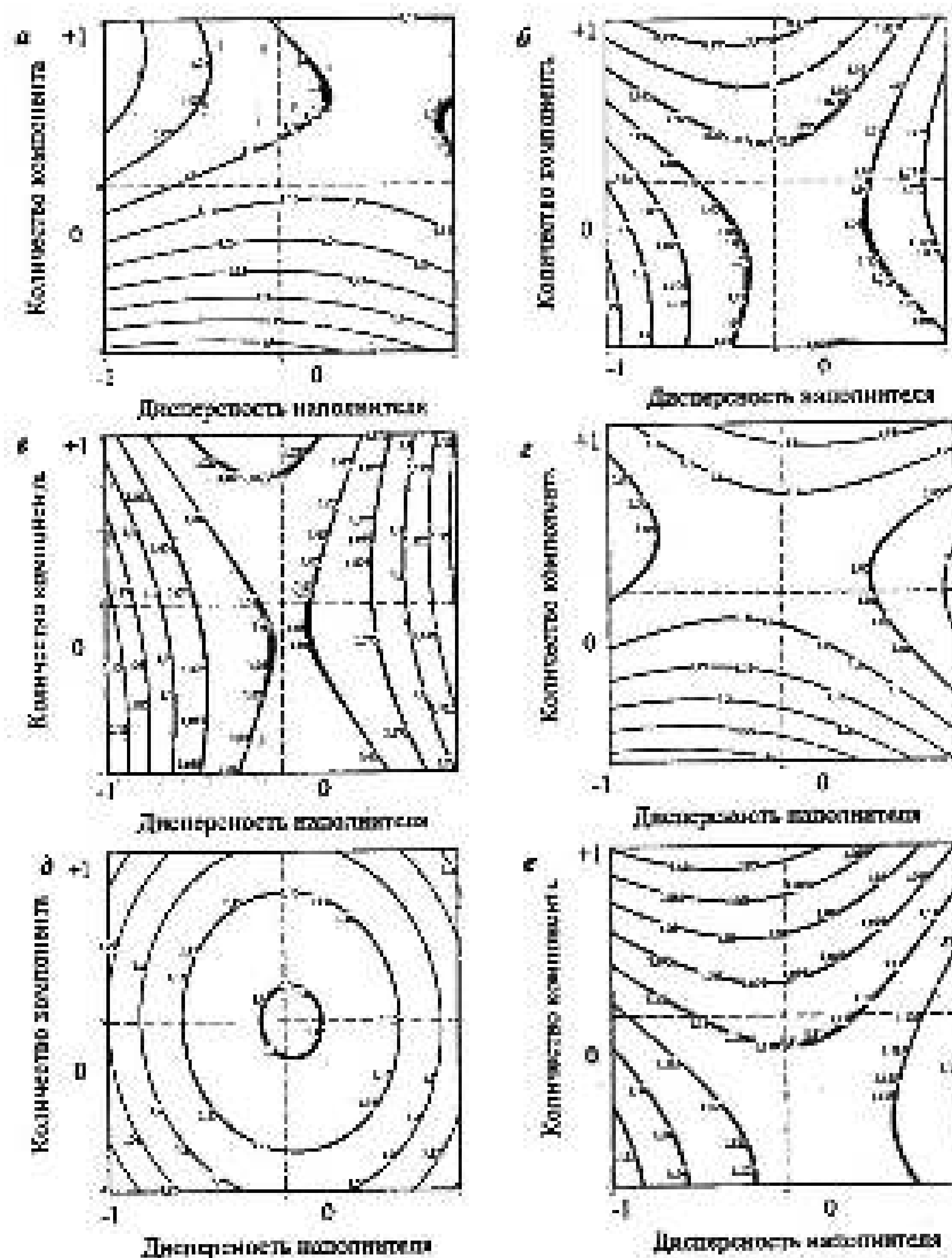


Рис. Изменение относительной прочности наполненных композитов с применением активированной воды затворения от длительности твердения вида наполнителя, его дисперсности и количественного содержания: а) прочность наполненных алюмосиликатным компонентом композитов в возрасте 3-х суток; б) то же, 7-ми суток; в) то же, 28-ми суток; г) прочность наполненных кремнеземистым компонентом композитов в возрасте 3-х суток; д) то же, 7-ми суток; е) то же, 28-ми суток.

Поступила 03.10.10.

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДА «ПРЕДИКТОР – КОРРЕКТОР»

А. А. Пономарев

Рассматривается проблема устойчивости линейной стационарной системы, замкнутой управлением «предиктор – корректор» (MPC). Получены критерии устойчивости в зависимости от выбора параметров метода, а также достаточные условия в виде оценок допустимого диапазона выбора параметров. При ограничении на величину управления предложен метод оценки снизу области асимптотической устойчивости в пространстве начальных данных.

1. Введение. Метод «предиктор – корректор» (*Model predictive control*, MPC) в различных модификациях успешно применяется для управления подвижными объектами и технологическими процессами (примеры можно найти в [2, Р. 207–226]). Моделирование таких процессов реализовано в среде MATLAB, где имеется набор инструментов *Model Predictive Control Toolbox*. Тем не менее, вопрос устойчивости замкнутой системы исследован недостаточно, и поэтому на практике часто ограничиваются численными экспериментами. Приведенные в монографии [3, Р. 1561–1572] способы обеспечения устойчивости накладывают достаточно строгие ограничения на выбор управления. Это может приводить к неразрешимости оптимизационной задачи. Поэтому существует необходимость в описании множества параметров метода, при которых замкнутая система устойчива, а также в наилучшем выборе параметров исходя из качества стабилизации и оптимизации. В данной работе рассматривается проблема изучения связи между параметрами метода MPC и свойством устойчивости замкнутой линейной стационарной системы при такой формулировке метода управления, которая оставляет возможность неограниченно варьировать параметры. Здесь получены критерии экспоненциальной устойчивости при данных значениях параметров, а также некоторые достаточные условия существования таких параметров, при которых стабилизация достигается. Эти результаты могут быть

полезны для дальнейших исследований в области качества стабилизации.

Работа состоит из шести частей. За введением следует описание метода MPC и постановка задачи стабилизации линейной стационарной системы этим методом. В третьей части рассматривается случай кусочно непрерывного управления без ограничений, выводятся достаточные условия, при которых существуют параметры метода, обеспечивающие экспоненциальную устойчивость. В четвертой и пятой частях исследуется метод MPC при кусочно постоянном управлении без ограничений и с ограничением на величину управления, указаны методы оценки множества стабилизирующих значений параметров и области асимптотической устойчивости. Завершается работа демонстрацией полученных результатов на примере скалярной системы.

2. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую линейную стационарную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$ с наблюдением полного вектора состояния $x(t)$. Существует проблема стабилизации нулевого положения равновесия данной системы. Для стабилизации будем использовать схему управления MPC в следующей формулировке.

Применение метода MPC в момент времени $t = t_0$ начинается с решения оптимизационной задачи

$$J(x(\cdot, t_0, x^{(0)}, u(\cdot)), u(\cdot), t_0) \xrightarrow{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{t_0}} \inf.$$

© А. А. Пономарев, 2010

Здесь $x(\cdot, t_0, x^{(0)}, u(\cdot))$ – решение задачи Коши для системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x^{(0)}$ и управлением $u(\cdot)$, выбранным из множества $\mathcal{U}_{t_0}$, допустимых на отрезке $[t_0; t_0 + T]$ управлений; T – параметр метода, называемый горизонтом прогноза, $T > 0$. Функционал качества $\mathcal{J}(x(\cdot), u(\cdot), t_0)$ есть квадратичный интегральный функционал вида

$$\mathcal{J}(x(\cdot), u(\cdot), t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} (x^T(t) M x(t) + u^T(t) N u(t)) dt,$$

где M и N – симметрические матрицы: M неотрицательно определена, N положительно определена. Выберем некоторое оптимальное в указанном смысле управление и применим его на отрезке $[t_0; t_0 + h]$, где h – второй параметр метода, называемый шагом, $0 < h \leq T$. По достижении времени $t_0 + h$ из системы наблюдения извлекается значение $x(t_0 + h)$, и процесс повторяется снова с теми же параметрами T и h , но новым начальным условием.

Задача состоит в том, чтобы исследовать замкнутую систему на предмет асимптотической устойчивости по Ляпунову при различных значениях параметров T и h . Мы ограничимся теми ситуациями, когда множество $\mathcal{U}_{t_0}$ не зависит от t_0 . Система (1) и функционал качества $\mathcal{J}$ стационарны, поэтому достаточно исследовать, например, первый шаг метода MPC, который соответствует $t_0 = 0$, ведь отображения $x(0) \mapsto x(h)$, $x(h) \mapsto x(2h)$ и т. д. идентичны. При исследовании этого первого шага множество допустимых управлений обозначим $\mathcal{U}$.

3. Кусочно непрерывное управление. В качестве класса допустимых управлений $\mathcal{U}$ рассмотрим класс кусочно непрерывных функций, заданных на отрезке $[0; T]$.

Пусть определено начальное условие $x(0) = x^{(0)}$. Прежде всего требуется найти кусочно непрерывное управление $u_{\text{опт}}(\cdot)$, которое удовлетворяет условию оптимальности

$$\mathcal{J}(x_{\text{опт}}(\cdot), u_{\text{опт}}(\cdot), 0) \leq \mathcal{J}(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot), 0),$$

где $\tilde{u}(\cdot)$ – произвольное кусочно непрерывное на отрезке $[0; T]$ управление; $\tilde{x}(\cdot)$ и $x_{\text{опт}}(\cdot)$ –

решения системы (1) с начальным условием $\tilde{x}(0) = x_{\text{опт}}(0) = x^{(0)}$, подчиненной соответственно управлению $\tilde{u}(\cdot)$ и $u_{\text{опт}}(\cdot)$. Предположим, что оптимальное управление существует. Пользуясь известным методом вариации управления, докажем следующий результат.

Теорема 1 [1]. Управление $u_{\text{опт}}(\cdot)$ оптимально тогда и только тогда, когда вместе с соответствующим движением $x_{\text{опт}}(\cdot)$ оно удовлетворяет условию

$$u_{\text{опт}}(t) = -N^{-1} B^T \int_t^T e^{A^T(t-\tau)} M x_{\text{опт}}(\tau) d\tau \quad (2)$$

при всех значениях t из отрезка $[0; T]$. Это оптимальное управление единственно.

Доказательство. Рассмотрим произвольное управление $\tilde{u}(\cdot)$, отличное от $u_{\text{опт}}(\cdot)$. Представим это управление в виде

$$\tilde{u}(t) = u_{\text{опт}}(t) + \mu v(t),$$

где $v(t)$ – кусочно непрерывная функция, заданная на отрезке $[0; T]$ и не равная тождественно нулю; μ – некоторое вещественное число. Движение системы (1), соответствующее управлению $\tilde{u}(\cdot)$, с начальным условием $\tilde{x}(0) = x^{(0)}$ представимо в виде

$$\tilde{x}(t) = x_{\text{опт}}(t) + \mu \int_0^t e^{A(t-\tau)} B v(\tau) d\tau.$$

Теперь можно связать значение функционала $\mathcal{J}$ на неоптимальной траектории с его оптимальным значением:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot), 0) &= \mathcal{J}(x_{\text{опт}}(\cdot), u_{\text{опт}}(\cdot), 0) + \\ &+ 2\mu \int_0^T \left(x_{\text{опт}}^T(t) M \int_0^t e^{A(t-\tau)} B v(\tau) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + u_{\text{опт}}^T(t) N v(t) \right) dt + \\ &+ \mu^2 \int_0^T \left(\int_0^t v^T(\tau) B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \times \right. \\ &\quad \left. \times M \int_0^t e^{A(t-\tau)} B v(\tau) d\tau + v^T(t) N v(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Управление $u_{\text{опт}}(\cdot)$ тогда и только тогда является оптимальным, когда при любом выборе

кусочно непрерывной функции $v(\cdot)$, не равной тождественно нулю на отрезке $[0; T]$, минимум правой части последнего равенства достигается в точке $\mu = 0$. Коэффициент при μ^2 положителен, поэтому это условие сводится к равенству нулю коэффициента при μ . Меняя порядок интегрирования в кратном интеграле, это можно записать так:

$$\int_0^T \left(\int_t^T x_{\text{опт}}^T(\tau) M e^{A(\tau-t)} d\tau B + u_{\text{опт}}^T(t) N \right) \times \\ \times v(t) dt = 0.$$

Благодаря произволу в выборе функции $v(\cdot)$ это условие эквивалентно условию (2). Оптимальное управление единственно, так как в противном случае минимум по μ , о котором идет речь выше, мог бы достигаться более чем в одной точке, что невозможно. Теорема 1 доказана.

Следствие. Если оптимальное управление $u_{\text{опт}}(\cdot)$ существует при любом выборе начального вектора $x^{(0)}$, то оно линейно зависит от компоненты этого вектора:

$$u_{\text{опт}}(t) = S(t)x^{(0)},$$

причем элементы матрицы $S(t)$ бесконечное число раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0; T]$.

Доказательство. Линейность – очевидное следствие условия (2). Гладкость матрицы $S(t)$ следует из того, что если управление $u_{\text{опт}}(\cdot)$ кусочно непрерывно, то движение $x_{\text{опт}}(\cdot)$ непрерывно как решение системы (1), но тогда управление $u_{\text{опт}}(\cdot)$, будучи определено формулой (2), непрерывно дифференцируемо, благодаря чему движение $x_{\text{опт}}(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемо, а управление $u_{\text{опт}}(\cdot)$ – трижды и т. д. Утверждение доказано.

Вопрос существования оптимального управления при произвольном начальном векторе равносильен проблеме существования матрицы $S(t)$, которая это оптимальное управление порождает. Обратимся к решению задачи о построении матрицы $S(t)$ в предположении, что она существует. Подставим управление $u_{\text{опт}}(t) = S(t)x^{(0)}$ в систему

(1) с начальным условием $x(0) = x^{(0)}$. Получим оптимальную траекторию

$$x_{\text{опт}}(t) = R(t)x^{(0)},$$

$$\text{где } R(t) = e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B S(\tau) d\tau.$$

Из условия (2) получается выражение матрицы $S(t)$ через $R(t)$, которое вместе с указанным только что выражением $R(t)$ через $S(t)$ образует систему

$$S(t) = -N^{-1} B^T \int_t^T e^{A^T(\tau-t)} M R(\tau) d\tau, \\ R(t) = e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B S(\tau) d\tau. \quad (3)$$

относительно $2n^2$ неизвестных компонент матриц $S(t)$ и $R(t)$.

С целью решения этой системы введем новую матрицу $\bar{R}(t)$ по формуле

$$\bar{R}(t) = - \int_t^T e^{A^T(\tau-t)} M R(\tau) d\tau.$$

Матрица $\bar{R}(t)$ связана с $S(t)$ равенством

$$S(t) = N^{-1} B^T \bar{R}(t).$$

Кроме того, справедливы тождества

$$\frac{dR(t)}{dt} = AR(t) + BS(t)$$

и

$$\frac{d\bar{R}(t)}{dt} = -A^T \bar{R}(t) + MR(t),$$

которые вместе с предыдущим приводят к системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R(t) \\ \bar{R}(t) \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} R(t) \\ \bar{R}(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{где } \Phi = \begin{pmatrix} A & BN^{-1}B^T \\ M & -A^T \end{pmatrix}$$

Общее решение этой системы записывается формулой

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ \bar{R}(t) \end{pmatrix} = e^{\Phi t} K,$$

где K – постоянная $2n \times n$ -матрица. Из условия $R(0) = E$ видно, что матрица K имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} E \\ K_1 \end{pmatrix},$$

где K_1 – $n \times n$ -матрица, причем согласно равенству $\tilde{R}(T) = 0$ ее элементы удовлетворяют неоднородной системе из n^2 линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & E \end{pmatrix} e^{\Phi T} \begin{pmatrix} E \\ K_1 \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

Если матрица K_1 известна, то, пользуясь соотношением

$$\begin{pmatrix} S(t) \\ R(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & N^{-1}B^T \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(t) \\ \tilde{R}(t) \end{pmatrix},$$

получаем выражение для матриц $S(t)$ и $R(t)$:

$$\begin{pmatrix} S(t) \\ R(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & N^{-1}B^T \\ E & 0 \end{pmatrix} e^{\Phi t} \begin{pmatrix} E \\ K_1 \end{pmatrix}.$$

Существование матрицы $S(t)$ равносильно, таким образом, существованию решения K_1 системы линейных алгебраических уравнений (4). Если матрица K_1 существует, то она определяет матрицу $R(h)$, которая ответственна за отображение $x^{(0)} \mapsto x_{opt}(h)$. Спектр матрицы $R(h)$ позволяет судить об устойчивости замкнутой системы, т. к. имеет место следующий факт.

Теорема 2. Пусть существует решение K_1 системы (4). Система (1), замкнутая кусочно непрерывным МРС, экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы

$$R(h) = \begin{pmatrix} E & 0 \end{pmatrix} e^{\Phi h} \begin{pmatrix} E \\ K_1 \end{pmatrix}$$

по модулю меньше единицы.

Матрица $R(h)$ при малых h допускает разложение

$$R(h) = E + R'(0)h + o(h),$$

$$\text{где } R'(0) = A + BN^{-1}B^TK_1,$$

откуда вытекает условие того, что при фиксированном горизонте прогноза T и некотором достаточно малом значении шага h достигается экспоненциальная устойчивость. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть система (4) имеет решение K_1 . Если все собственные числа матрицы $A + BN^{-1}B^TK_1$ имеют отрицательные вещественные части, то существует такое число $h_* > 0$, что при всех значениях шага h из промежутка $(0; h_*)$ система (1), замкнутая кусочно непрерывным МРС, экспоненциально устойчива.

Пусть существует оптимальное управление при произвольном начальном векторе и бесконечном горизонте прогноза, т. е. управление, минимизирующее функционал J при $T = \infty$. Это значит, что система (4) имеет решение K_∞ при $T = \infty$. В силу непрерывности она имеет решение и при конечном, но достаточно большом значении T , причем соответствующее решение K_T стремится к K_∞ , когда $T \rightarrow \infty$. Зафиксируем какое-либо значение шага $h > 0$. Если определить матрицы

$$R_T(h) = \begin{pmatrix} E & 0 \end{pmatrix} e^{\Phi h} \begin{pmatrix} E \\ K_T \end{pmatrix}$$

и

$$R_\infty(h) = \begin{pmatrix} E & 0 \end{pmatrix} e^{\Phi h} \begin{pmatrix} E \\ K_\infty \end{pmatrix},$$

можно утверждать, что $R_T(h) \rightarrow R_\infty(h)$ при $T \rightarrow \infty$. В то же время при $T = \infty$ оптимальное управление, как утверждает принцип Беллмана, имеет вид $u(t) = \bar{S}x(t)$ при некоторой постоянной матрице $\bar{S}$. Если это управление является стабилизирующим, то матрица замкнутой системы $A + B\bar{S}$ имеет все собственные числа в левой полуплоскости, поэтому спектр матрицы $R_\infty(h) = e^{(A+B\bar{S})h}$ лежит внутри единичного круга. Следовательно, при достаточно большом T все собственные числа матрицы $R_T(h)$ также меньше единицы по модулю. Приходим к следующему выводу.

Теорема 4. Пусть при $T = \infty$ оптимальное в смысле минимизации функционала J управление существует и является стабилизирующим. Тогда для каждого данного значения шага h найдется такой горизонт прогноза T , что система (1), замкнутая кусочно непрерывным МРС, экспоненциально устойчива.

Кроме того, можно заметить, что при условиях теоремы 4 условие теоремы 3 заведомо выполняется, когда горизонт прогноза

достаточно велик, поскольку при $T = \infty$ матрица

$$A + BN^{-1}B^TK_{\infty} = A + BS(0) = A + B\bar{S}$$

имеет все собственные числа в левой полуплоскости.

4. Кусочно постоянное управление без ограничений. Рассмотрим множество допустимых управлений вида

$$\mathcal{U} = \{u(\cdot) = U(\cdot)\ell : \ell \in \mathbb{R}^r\}.$$

Здесь $U(\cdot)$ – матрица кусочно непрерывных функций размерности $m \times r$ с линейно независимыми на промежутке $[0; T]$ столбцами. В данный класс входят и кусочно постоянные управления с фиксированными точками разрыва. Обозначение $u(t) = U(t)\ell$ используется далее для краткости, но не для общности.

По формуле Копи решение системы (1) с управлением $u(t) = U(t)\ell$ и начальным условием $x(0) = x^{(0)}$ может быть представлено в виде

$$x(t) = e^{At}x^{(0)} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau\ell.$$

Тогда функционал качества $\mathcal{J}$ примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x(\cdot, 0, x^{(0)}, U(\cdot)\ell), U(\cdot)\ell, 0) = \\ = \mathcal{J}_0 + 2\ell^TPx^{(0)} + \ell^TQ\ell, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P &= \int_0^T U_1^T(t)Me^{At}dt, \\ Q &= \int_0^T \left(U_1^T(t)MU_1(t) + U^T(t)NU(t) \right) dt, \\ U_1(t) &= \int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

а слагаемое $\mathcal{J}_0$ от вектора ℓ не зависит.

Столбцы матрицы $U(t)$ линейно независимы на отрезке $[0; T]$, поэтому матрица Q положительно определена. Следовательно, значение $\ell_{\text{опт}}$, доставляющее минимум функционалу $\mathcal{J}$, определится из условия равенства нулю градиента:

$$\ell_{\text{опт}} = S_c x^{(0)}, \text{ где } S_c = -Q^{-1}P.$$

Применение управления $u(\cdot) = U(\cdot)\ell_{\text{опт}}$ на отрезке $[0; h]$ переводит систему в состояние

$$x(h) = R_c x^{(0)},$$

$$\text{где } R_c = e^{Ah} \left(E + \int_0^h e^{-A\tau}BU(\tau)d\tau S_c \right).$$

Очевидно следующее утверждение.

Теорема 5. Система (1), замкнутая кусочно постоянным MPC, экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы R_c по модулю меньше единицы.

Теперь получим условие, при выполнении которого асимптотическую устойчивость системы (1), замкнутой MPC, можно обеспечить выбором достаточно малого шага h . Будем рассматривать только такие значения h , при которых компоненты матрицы $U(t)$ аналитичны на отрезке $[0; h]$. В случае кусочно постоянного управления это значит, что величина шага не превосходит интервала постоянства управления. Зависимость матрицы R_c от шага h обозначим $R_c(h)$. Благодаря представлению

$$R_c(h) = E + R'_c(0)h + o(h),$$

$$\text{где } R'_c(0) = A + BU(0)S_c,$$

имеем следующий результат.

Теорема 6. Если все собственные числа матрицы $A + BU(0)S_c$ имеют отрицательные вещественные части, то существует такое число $h_* > 0$, что при всех значениях шага h на промежутке $(0; h_*)$ система (1), замкнутая кусочно постоянным MPC, экспоненциально устойчива.

Оценку числа h_* можно получить следующим образом с помощью метода функций Ляпунова.

В предположениях теоремы 6 спектр матрицы $R'_c(0)$ лежит в открытой левой полуплоскости. Выберем произвольную положительно определенную $n \times n$ -матрицу W . Известно, что тогда существует положительно определенная матрица V , удовлетворяющая матричному уравнению Ляпунова

$$(R'_c(0))^TV + VR'_c(0) = -W.$$

Можно гарантировать, что спектр матрицы $R_c(h)$ лежит внутри единичного круга, если матрица

$$R_c^T(h)VR_c(h) - V$$

отрицательно определена. Достаточно показать, что значение квадратичной формы с этой матрицей на произвольном векторе z ($\|z\| = 1$) отрицательно:

$$z^T(R_c^T(h)VR_c(h) - V)z < 0.$$

Используя разложение матрицы $R_c(h)$ в ряд Тейлора по степеням h , получим последнее неравенство в виде

$$-z^TWzh + z^T\left(\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=0}^k\frac{1}{m!(k-m)!}\times\right. \\ \left.\times(R_c^{(m)}(0))^TVR_c^{(k-m)}(0)h^k\right)z < 0.$$

Оно заведомо выполнено, если

$$-\lambda_{\min}(W)h + \\ + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=0}^k\frac{\rho_m\rho_{k-m}}{m!(k-m)!}h^k\lambda_{\max}(V) < 0,$$

где $\rho_s \geq \|R_c^{(s)}(0)\|$ при всех $s \geq 0$, а символы $\lambda_{\min}(\cdot)$ и $\lambda_{\max}(\cdot)$ используются для обозначения соответственно наименьшего и наибольшего собственного числа. Полученное неравенство эквивалентно следующему:

$$-\lambda_{\min}(W)h + \\ + \left(\left(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\rho_s h^s}{s!}\right)^2 - \rho_0^2 - 2\rho_0\rho_1h\right) \times \\ \times \lambda_{\max}(V) < 0. \quad (3)$$

Матрица $U(t)$ кусочно постоянна, поэтому производные $R_c^{(s)}(0)$ подчиняются правилу

$$R_c(0) = E,$$

$$R_c^{(s)}(0) = A^{s-1}(A + BU(0)S_c) \text{ при } s \geq 1,$$

Следовательно, можно положить

$$\rho_0 = 1,$$

$$\rho_s = \|A\|^{s-1}\|A + BU(0)S_c\| \text{ при } s \geq 1.$$

Тогда неравенство (5) принимает вид

$$-\lambda_{\min}(W)h + \left((1 + \frac{\alpha}{\|A\|}(e^{\|A\|h} - 1))^2 - \right. \\ \left. - 1 - 2\alpha h\right)\lambda_{\max}(V) < 0, \quad (6)$$

где $\alpha = \|A + BU(0)S_c\|$. Имеем следующее утверждение.

Теорема 7. При выполнении условия теоремы 6 в качестве числа h_* достаточно взять такое число, меньшее интервала постоянства управления, что при всех значениях h из промежутка $(0; h_*)$ справедливо неравенство (6).

5. Кусочно постоянное управление с ограничением. Пусть в отсутствие ограничений система (1), замкнутая кусочно постоянным МРС, экспоненциально устойчива. Наложим ограничение на выбор вектора ℓ , который определяет управление $u(t)$:

$$U = \{u(\cdot) = U(\cdot)\ell : \ell \in L\},$$

здесь L — выпуклое замкнутое множество в пространстве $\mathbb{R}^r$, содержащее точку $\ell = 0$ в качестве внутренней точки.

Рассмотрим в качестве простого примера ограничение в виде эллипсоида:

$$L = \{\ell \in \mathbb{R}^r : \ell^TC\ell \leq p\},$$

где C — положительно определенная $r \times r$ -матрица, $p > 0$. В данном случае вопрос сводится к исследованию области асимптотической устойчивости в пространстве $\{x\}$: очевидно, что, вообще говоря, не при всяких начальных условиях решение может быть устремлено к 0 при ограниченной величине управления.

Будем использовать метод функций Ляпунова: пусть V — положительно определенная $n \times n$ -матрица; g — положительное число; $x^{(0)}$ — любой вектор из области

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x^TVx \leq g\},$$

$x(h)$ — решение системы (1), замкнутой кусочно постоянным МРС, с начальным условием $x(0) = x^{(0)}$ и ограничением $\ell \in L$. Если величина

$$x^T(h)Vx(h) - x^{(0)T}Vx^{(0)} \quad (7)$$

отрицательно определена при всех $x^{(0)}$ из указанной выше области, то эта область является оценкой снизу требуемой области асимптотической устойчивости.

Рассмотрим произвольную положительно определенную матрицу W размером $n \times n$. Поскольку спектр матрицы R_c согласно теореме 1 лежит внутри единичного круга, уравнение

$$R_c^T V R_c - V = -W$$

относительно матрицы V имеет положительно определенное решение. Далее будем под матрицей V понимать именно такое решение.

Допустим, что известна положительная величина β такая, что при всех x из области

$$\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T V x \leq \beta \bar{p}\},$$

где $\bar{p} \geq p$, вектор $\ell = S_c x$ принадлежит области

$$\bar{L} = \{\ell \in \mathbb{R}^r : \ell^T C \ell \leq \bar{p}\}$$

Например, можно взять

$$\beta = \frac{\lambda_{\min}(V)}{\|S_c\|^2 \lambda_{\max}(C)}.$$

Очевидно, что в силу линейного характера связи ℓ и x нет необходимости выбирать число β зависящим от $\bar{p}$.

Когда $\bar{p} = p$, приращение (7) отрицательно определено при $x^{(0)} \in \bar{X}$ благодаря тому, что $x(h) = R_c x^{(0)}$, а матрица V выбрана так, как указано выше. Стало бы интересно увеличивать число $\bar{p}$ и потребуем, чтобы величина (7) оставалась отрицательной при всех $x^{(0)} \in \partial \bar{X}$, где

$$\partial \bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T V x = \beta \bar{p}\}.$$

Если $x^{(0)} \in \partial \bar{X}$, то соответствующий оптимальный вектор $\ell_{\text{opt}} = S_c x^{(0)}$ может быть как допустимым, так и нет. В первом случае разность (7) отрицательна. Если же ℓ_{opt} — не допустимый вектор, то использоваться в управлении будет вектор $\hat{\ell}$, наилучший из допустимых. Он удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \nabla_{\ell} J(x(\cdot, 0, x^{(0)}, U(\cdot)\ell), U(\cdot)\ell, 0)|_{\ell=\hat{\ell}} = \\ = -\mu \nabla_{\ell} (\ell^T C \ell)|_{\ell=\hat{\ell}}. \end{aligned}$$

где μ — некоторое положительное число. Вычислив градиенты, это уравнение можно записать в виде

$$P x^{(0)} + Q \hat{\ell} = -\mu C \hat{\ell}.$$

В то же время известно, что

$$P x^{(0)} + Q \ell_{\text{opt}} = 0.$$

Следовательно, $\ell_{\text{opt}} - \hat{\ell} = \mu Q^{-1} C \hat{\ell}$, и

$$(C \hat{\ell})^T (\ell_{\text{opt}} - \hat{\ell}) \geq 0.$$

Используя полученное неравенство, а также условия

$$\ell_{\text{opt}}^T C \ell_{\text{opt}} = \bar{p} \text{ и } \hat{\ell}^T C \hat{\ell} = p,$$

выводим оценку

$$\|\hat{\ell} - \ell_{\text{opt}}\| \leq \sqrt{\frac{\bar{p} - p}{\lambda_{\min}(C)}}.$$

Применение управления $U(\cdot)\hat{\ell}$ на промежутке $[0; h]$ приводит к значению

$$x(h) = e^{Ah} x^{(0)} + H \hat{\ell} = R_c x^{(0)} + H(\hat{\ell} - \ell_{\text{opt}}),$$

$$\text{где } H = \int_0^h e^{A(h-\tau)} B U(\tau) d\tau.$$

Поэтому разность (7) допускает оценку

$$\begin{aligned} x^T(h) V x(h) - x^{(0)T} V x^{(0)} &\leq \\ &\leq -\lambda_{\min}(W) \|x^{(0)}\|^2 + (2\|R_c\| \|x^{(0)}\| \|H\| \|\hat{\ell} - \ell_{\text{opt}}\| + \|H\|^2 \|\hat{\ell} - \ell_{\text{opt}}\|^2) \lambda_{\max}(V) \leq \\ &\leq -A \bar{p} + B \sqrt{\bar{p}} \sqrt{\bar{p} - p} + C(\bar{p} - p), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta \lambda_{\min}(W)}{\lambda_{\max}(V)}, \quad B = \frac{2\|R_c\| \|H\| \sqrt{\beta} \lambda_{\max}(V)}{\sqrt{\lambda_{\min}(V)} \lambda_{\min}(C)}, \\ C &= \frac{\|H\|^2 \lambda_{\max}(V)}{\lambda_{\min}(C)}. \end{aligned}$$

Теорема 8. Пусть система (1), замкнутая кусочно постоянным MPC без ограничений, экспоненциально устойчива. Тогда если при всех значениях $\bar{p}$ из отрезка $[p; p_*]$ верно, что

$$-A \bar{p} + B \sqrt{\bar{p}} \sqrt{\bar{p} - p} + C(\bar{p} - p) < 0,$$

то множество $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T V x \leq \beta p_*\}$ является оценкой снизу области асимптотической устойчивости системы (1), замкнутой кусочно постоянным МРС при ограничении $\ell \in L$.

Пример. Рассмотрим скалярную систему. Матрицы A и B при этом вырождаются в вещественные числа, будем считать, что $B \neq 0$. Положим также $M = N = 1$, этого всегда можно добиться заменой переменных, если $M \neq 0$ и $N \neq 0$. Следовательно, функционал качества принимает вид

$$J(x(\cdot), u(\cdot), t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} (x^2(t) + u^2(t)) dt.$$

Можно вычислить следующие величины:

$$K_1 = -\frac{\operatorname{sh} \lambda T}{B \operatorname{ch}(\lambda T - \tau)},$$

$$R(h) = \frac{1}{\lambda} \left(B \operatorname{ch}(\lambda h + \tau) - \frac{\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda T}{B \operatorname{ch}(\lambda T - \tau)} \right),$$

$$R'(0) = A - \frac{B \operatorname{sh} \lambda T}{\operatorname{ch}(\lambda T - \tau)},$$

$$K_\infty = \frac{1}{A - \lambda}, \quad A + B\bar{S} = -\lambda,$$

где $\lambda = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\operatorname{ch} \tau = \frac{\lambda}{B}$, $\operatorname{sh} \tau = \frac{A}{B}$. Число $\bar{S} = N^{-1} B^T K_\infty$ определяется как значение $S(0)$ при $T = \infty$ и связано с оптимальным на бесконечном горизонте управлением $u_\infty(t)$ и соответствующим движением $x_\infty(t)$ равенством $u_\infty(t) = \bar{S} x_\infty(t)$, поэтому из того, что $A + B\bar{S} < 0$, следует выполнение условий теоремы 4.

Неравенство $|R(h)| < 1$ — необходимое и достаточное условие экспоненциальной устойчивости при данных значениях горизонта T и шага h . Отрицательность числа $R'(0)$ — достаточное условие того, что при данном горизонте T и любом достаточно малом шаге h замкнутая система экспоненциально устойчива. Справедливость неравенства $A + B\bar{S} < 0$ свидетельствует о том, что при данном значении шага h можно указать достаточно большой горизонт T так, чтобы добиться экспоненциальной устойчивости.

В случае кусочно постоянного управления рассмотрим ситуацию, когда управление постоянно на всем промежутке прогнозиро-

вания. Это позволит избежать громоздких выкладок. Положим $U(t) \equiv 1$, и ℓ будет вещественным числом, определяющим величину управления на горизонте прогноза. Имеют место равенства

$$S_c = \frac{B(e^{AT} - 1)^2}{B^2(e^{AT} - 3)(e^{AT} - 1) + \lambda^2 T},$$

$$R_c = e^{Ah} + \frac{B}{A}(e^{Ah} - 1)S_c$$

и предельные соотношения

$$S_c \xrightarrow{T \rightarrow \infty} S_{c,\infty} = -\frac{1}{B},$$

$$R_c \xrightarrow{T \rightarrow \infty} R_{c,\infty} = \left(1 - \frac{1}{A}\right) e^{Ah} + \frac{1}{A}.$$

Если $|R_{c,\infty}| < 1$, то при данном шаге h и достаточно большом горизонте T система экспоненциально устойчива. В частности, это условие не выполнено ни при каком h , если $A > 1$, и выполнено при всех $h > 0$, если $A < -1$. Если $A < 1$, то условие $|R_{c,\infty}| < 1$ выполняется при всех достаточно малых h , т. к. при этом $R'_{c,\infty}(0) = A - 1 < 0$. Если зафиксировать T , то при выполнении неравенства $R'_c(0) < 0$ можно явно выписать неравенство (6) и с помощью теоремы 7 численно оценить, насколько малый шаг h гарантирует экспоненциальную устойчивость. При этом V и W превращаются в положительные числа. Наконец, если допустимые значения ℓ ограничены областью типа $|\ell| < p$, то при условии $R_c < 0$ теорема 8 позволяет найти область в пространстве x , при попадании в которую решения замкнутой системы гарантированно притягиваются к началу координат.

Итак, приведенные выше утверждения позволяют сделать некоторые выводы относительно возможности выбора параметров метода МРС, гарантирующих стабилизацию. С помощью численного анализа получающихся при этом неравенств можно судить о том, какие конкретно параметры допустимо выбирать. Однако остается проблема выбора параметров, наилучших в том или ином смысле, исходя из качества стабилизации. Решение этого вопроса составляет предмет ближайших исследований.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zubov B. I. *Лекции по теории управления* / В. И. Зубов. – М. : Наука, 1975. – 496 с.
2. Camacho C. F. *Model Predictive Control* / C. F. Camacho, C. Bordons. – Springer-Verlag, 1999.
3. Maciejowski J. M. *Predictive Control with Constraints* / J. M. Maciejowski. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 2002.

Поступила 01.11.10.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Александров Александр Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой управления медико-биологическими системами факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Афиногенова Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Афонин Виктор Васильевич, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления (АСОИУ) Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Базеева Наталья Алексеевна, аспирант кафедры дифференциальных уравнений Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Бакеева Ольга Александровна, аспирант кафедры дифференциальных уравнений, ассистент кафедры информатики и вычислительной техники Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Батин Виталий Викторович, кандидат технических наук, доцент кафедры твердого тела Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Бритов Александр Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии уравнений Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Голечков Юрий Иванович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ).

Гурченков Анатолий Андреевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Вычислительного центра Российской академии наук им. А. А. Дородницына.

Дружинина Ольга Валентиновна, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Вычислительного центра Российской академии наук им. А. А. Дородницына.

Емельянов Денис Владимирович, аспирант кафедры строительных материалов и технологий Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Жабко Алексей Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Зараник Ульяна Петровна, аспирант, ассистент кафедры теории управления факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Иванов Илья Михайлович, аспирант Вычислительного центра Российской академии наук им. А. А. Дородницына.

Козлов Михаил Владимирович, магистрант по направлению «Прикладная математика и информатика» по программе «Оптимизация и оптимальное управление» Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Куриосов Геннадий Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Ладошкин Михаил Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Мордовского государственного педагогического института им. М. Е. Евсевьева.

Ладяев Дмитрий Александрович, кандидат технических наук, начальник управления информационных технологий Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Лазин Сергей Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Мордовского государственного педагогического института им. М. Е. Евсевьева.

Лаптев Геннадий Алексеевич, кандидат технических наук, профессор кафедры автомобильных дорог и специальных инженерных сооружений Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Лапцина Роза Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Лизина Елена Александровна, соискатель кафедры дифференциальных уравнений геометрии Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Марьина Оксана Александровна, аспирант кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления (АСОИУ) Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Матвиевский Александр Анатольевич, соискатель кафедры строительных материалов и технологий Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Миронова Светлана Михайловна, аспирант кафедры математики Мордовского государственного педагогического института им. М. Е. Евсевьева.

Никонов Владимир Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Пескова Ольга Владимировна, магистрант по направлению «Прикладная математика и информатика» по программе «Оптимизация и оптимальное управление» Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Песков Роман Николаевич, магистрант по направлению «Прикладная математика и информатика» по программе «Оптимизация и оптимальное управление» Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Петрова Наталья Петровна, кандидат филологических наук, научный сотрудник Вычислительного центра Российской академии наук им. А. А. Дородницына.

Петрова Светлана Николаевна, кандидат педагогических наук, доцент Уральского государственного экономического университета.

Платонов Алексей Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры управления медико-биологическими системами Санкт-Петербургского государственного университета.

Попомарев Антон Александрович, студент V курса факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Савкина Анастасия Васильевна, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления (АСОИУ) Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Тактаров Николай Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Мордовского государственного педагогического института им. М. Е. Евсевьева.

Фосечко Анатолий Иванович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Вычислительного центра Российской академии наук им. А. А. Дородницына.

Федосин Сергей Алексеевич, кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой автоматизированных систем обработки информации и управления Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Чудаев Александр Эдуардович, студент IV курса математического факультета Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Шестаков Александр Андреевич, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет путей сообщения.

Шихасв Кирилл Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор.

Щенникова Елена Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и вычислительной техники Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Щенников Владимир Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Юдин Павел Васильевич, аспирант кафедры строительных материалов и технологий Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

**Редакция журнала «Вестник Мордовского университета»
объявляет о наборе научных статей**

К публикации принимаются **РАНЕЕ НЕ ОПУБЛИКОВАННЫЕ** статьи, хроника, рецензии, обзоры кандидатов и докторов наук, преподавателей университета, аспирантов и студентов V курса.

Материалы, выполненные в текстовом редакторе MS Word, предоставляются в редакцию в распечатанном и электронном вариантах.

Поля: левое — 3 см, верхнее и нижнее — 2 см, правое — 1,5 см.

Гарнитура — Times New Roman, кегль — 14, межстрочный интервал — 1,5.

Объем статей — 6–12 страниц.

Для хроник, рецензий, обзоров — до 6 страниц.

Обязательна аннотация статьи (кегль 12).

Ссылки на литературу приводятся в квадратных скобках (например: [1, с. 222]). Библиографический список сортируется по алфавиту и оформляется согласно требованиям ГОСТ 7.1–2003. Фамилия и инициалы авторов в библиографическом списке, а также названия источников должны быть верными.

Рисунки должны быть в отдельных файлах, пронумерованы, с верными подписями, хорошего качества (размером не менее 600 на 600 пикселей). Вставлять их в документ Word не нужно! В формате JPEG рисунки не принимаются, так как их нельзя править. Таблицы также нумеруются и подписываются.

ОБЯЗАТЕЛЬНА авторская справка. В ней необходимо указать:

- фамилию, имя, отчество (полностью);
- должность;
- контактный телефон;
- адрес электронной почты (для иногородних авторов обязателен).

Стоимость публикации — 20 рублей за 1 страницу формата А4.

Статьи, не отвечающие вышеуказанным требованиям, к публикации не принимаются.

Редакция сохраняет за собой право отказать в публикации статьи с объяснением причин отказа.

В редакции есть Интернет, поэтому просим не составлять статью только с помощью функций «Выделить», «Копировать» и «Вставить». Такие материалы возвращаются авторам.

Уведомляем, что электронные версии статей будут размещены в Научной электронной библиотеке.

Адрес редакции: 430005, г. Саранск, ул. Б. Хмельницкого, 31, кв. 3

Телефон: (8342) 24-25-18.

e-mail: vestnik_mrsu@mail.ru.

ШАПКРИН Константин Иванович — заместитель главного редактора.

САВОЙСКАЯ Елена Владимировна — редактор.

МИТЬКОВА Жанна Владимировна — ответственный секретарь.

Адрес редакции: 430005, Саранск, ул. Б. Хмельницкого, 31, кв. 3
Телефон: 8 (8342) 24-25-18. E-mail: vestnik_mrsu@mail.ru

Материалы публикуются в авторской редакции
Корректор *Ж. В. Митькова*
Компьютерная верстка *Е. А. Лизиной*

Подписано в печать 21.02.11. Формат 70х100 $\frac{1}{16}$. Усл. печ. л. 10,97.

Тираж 200 экз. Заказ № 285. Цена свободная.

Издательство Мордовского университета
Типография Издательства Мордовского университета
430005, г. Саранск, ул. Советская, 24

