



## Согласованные движения электронов на поверхности графена

А. В. Юденков<sup>1</sup>, А. М. Володченков<sup>2\*</sup>, М. А. Юденкова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Смоленская государственная академия физической культуры, спорта и туризма» (г. Смоленск, Россия)

<sup>2</sup>Смоленский филиал ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова» (г. Смоленск, Россия)

<sup>3</sup>ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (г. Долгопрудный, Россия)

\*[alexmw2012@yandex.ru](mailto:alexmw2012@yandex.ru)

*Введение.* Актуальной задачей является развитие теории графена для поиска способов управления его физическими и механическими свойствами. В статье исследованы электропроводные свойства графена (в частности, линейный закон дисперсии электронов и следствия из этого закона).

*Материалы и методы.* В качестве материала для построения теории были использованы проверенные экспериментальные данные, а также основные положения физики твердого тела и квантовой механики. В статье использован универсальный синергетический принцип, согласно которому строятся две разноуровневые согласованные математические модели движения квазичастиц в графене при воздействии электрического поля. На макроскопическом уровне графен предложено рассматривать как кристалл, состоящий из трех параллельных плоскостей: две плоскости представляют собой электронный газ, еще одна является основной частью кристалла. На микроскопическом уровне движение квазичастиц электронной волны описывается уравнением Шредингера.

*Результаты исследования.* Получен альтернативный метод вывода линейного закона дисперсии в графене на макроскопическом уровне. На основе анализа модели предложена гипотеза о согласованном движении пар электронов, образующих бозон. Данная гипотеза отличается от традиционной, согласно которой квазичастицы в графене являются фермионами Дирака. Для проверки непротиворечивости гипотезы рассмотрен эффект Холла в графене. Также из уравнения Шредингера выведен линейный закон дисперсии для пары электронов. Как макроскопическая, так и микроскопическая модели в достаточной степени согласуются с опытными данными.

*Обсуждение и заключение.* Основным результатом статьи является построение многоуровневой математической модели, адекватно описывающей электропроводные свойства графена (линейный закон дисперсии, аномальный эффект Холла). Практическая значимость состоит в создании возможности регулирования электропроводных свойств графена путем воздействия на электронные пары.

**Ключевые слова:** графен, дисперсионный закон, эффект Холла, уравнение Шредингера, фермион Дирака

**Для цитирования:** Юденков А. В., Володченков А. М., Юденкова М. А. Согласованные движения электронов на поверхности графена // Инженерные технологии и системы. 2019. Т. 29, № 2. С. 234–247. DOI: <https://doi.org/10.15507/2658-4123.029.201902.234-247>

© Юденков А. В., Володченков А. М., Юденкова М. А., 2019



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License.  
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

## Cooperative Motion of Electrons on the Graphene Surface

A. V. Yudenzov<sup>1</sup>, A. M. Volodchenkov<sup>2\*</sup>, M. A. Iudenkova<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Smolensk State Academy of Physical Culture, Sport and Tourism  
(Smolensk, Russia)

<sup>2</sup>Smolensk Branch of Plekhanov Russian University of Economics  
(Smolensk, Russia)

<sup>3</sup>Moscow Institute of Physics and Technology  
(Dolgoprudnyy, Russia)

\*alexmw2012@yandex.ru

*Introduction.* Today, the development of the graphene theory to control its physical and mechanical properties is a relevant objective. The paper deals with the conducting properties of graphene. In particular, the paper investigates the linear law of electron dispersion and traces its corollaries.

*Materials and Methods.* The development of the theory is based on the verified experimental data and on the fundamental principles of the solid body theory and quantum mechanics. The study follows the universal synergetic principle according to which, there have been developed two split-level mathematical models of the quasi-particle motion in graphene on exposure to the electric field. On the macroscopic level, we suggest that graphene should be analyzed as a crystal consisting of three parallel planes. Two of them are electron gas. The remaining one is the main body of the crystal. On the microscopic level, the quasi-particle motion of the electron wave is described through the Schroedinger equation.

*Results.* The study has developed the alternative method for the explanation of the linear dispersion law in graphene on the macroscopic level. Basing on the analysis of the model, the paper provides a hypothesis of the cooperative motion of the electron pairs, which make up a boson particle. The given hypothesis is different from the traditional one. In accordance with the latter, quasi-particles in graphene are Dirac fermions. To prove the hypothesis consistency, the study examines Hall's effect in graphene. The linear dispersion law for a pair of electrons is also deduced from the Schroedinger equation. Both the macroscopic and microscopic models are in a reasonable agreement with the experimental data.

*Discussion and Conclusion.* The main result of the research is the development of the multi-level mathematical model which properly features the conducting properties of graphene (linear dispersion law, anomalous Hall effect). The practical relevance consists in revealing the possibility to control the conducting properties of graphene through impacts on electron pairs.

**Keywords:** graphene, dispersion law, Hall effect, Schroedinger equation, Dirac fermion

**For citation:** Yudenzov A.V., Volodchenkov A.M., Iudenkova M.A. Cooperative Motion of Electrons on the Graphene Surface. *Inzhenernyye tekhnologii i sistemy* = Engineering Technologies and Systems. 2019; 29(2):234-247. DOI: <https://doi.org/10.15507/2658-4123.029.201902.234-247>

### Введение

Графен – первый и наиболее известный двумерный кристалл, полученный из обычного графита. Интерес к двумерным объектам появился достаточно давно; существуют теоретические исследования по изучению двумерно-

го газа. Л. Д. Ландау предполагал, что двумерный кристалл в принципе не может быть устойчивым. Однако в 2004 г. в университете Манчестера выпускники МФТИ А. Гейм и К. Новоселов получили образцы графена – двумерной модификации углерода [1–4].

Наличие образцов двумерного кристалла позволило вести целенаправленные экспериментальные и теоретические исследования. На данный момент известны свойства графена, делающие его действительно уникальным материалом. Графен обладает высокой механической прочностью, хорошо проводит электрический ток и тепло и т. д. [5–10]. Естественно, подобные свойства нуждаются в теоретическом описании.

В статье основное внимание будет уделено линейному закону дисперсии электронов в графене. Линейный закон дисперсии действует для безмассовых частиц; следовательно, квазичастицы, возникающие при прохождении тока в графене, имеют нулевую эффективную массу. Кроме того, считается, что квазичастицы в графене являются фермионами. Линейный закон дисперсии позволяет моделировать в графене процессы, аналогичные процессам в квантовой электродинамике, без привлечения высоких энергий. На наш взгляд, изучение и объяснение линейного закона дисперсии являются ключевыми вопросами для построения законченной

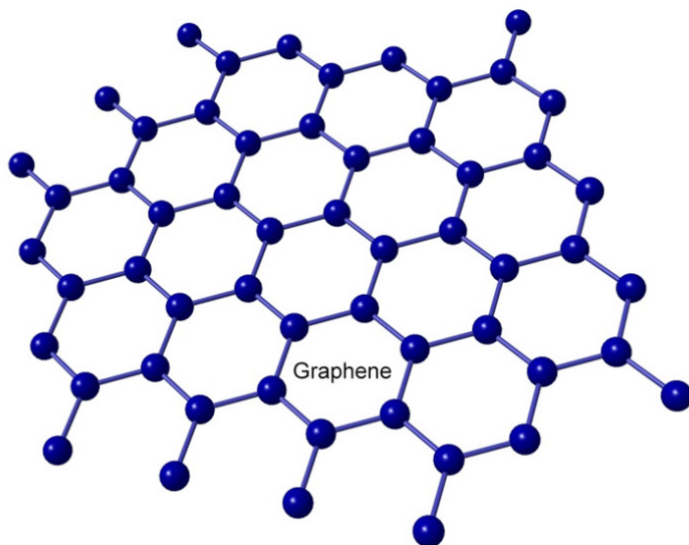
теории графена. К настоящему времени объяснению линейного закона дисперсии посвящено достаточно большое число работ.

В представленной статье предложено подойти к изучению линейного закона дисперсии электронов в графене с использованием универсального метода моделирования, предложенного в исследованиях по синергетике [11]. Авторами предложена макроскопическая модель движения электронов в графене; после ее анализа будет рассмотрена микроскопическая модель. В результате исследования должна быть получена простая и адекватная модель распространения электронной волны по поверхности графена, а также рассмотрено парное взаимодействие электронов.

#### Обзор литературы

Кристаллическая решетка графена представляет собой гексагональные соты (рис. 1).

Сама элементарная ячейка состоит из двух видов атомов. Расстояние между ближайшими атомами углерода  $a = 0,142$  Нм; расстояние между двумя



Р и с. 1. Строение решетки графена  
F i g. 1. The graphene lattice structure

одинаковыми атомами  $a = 0,246$  Нм. Из четырех электронов, находящихся на внешней оболочке атома, три «жестко» зафиксированы связью  $sp^2$ -гибридизированных орбиталей с соседними атомами. Оставшийся электрон располагается перпендикулярно основной плоскости кристалла, находясь в  $2p_z$  состоянии. Именно данный электрон отвечает за электронные свойства графена [12]. С учетом требований минимума энергии для устойчивого состояния объемная модель сотовой ячейки имеет вид, представленный на рис. 2.

Одной из основополагающих работ, посвященных изучению дисперсионного закона электронов в угле-роде, считается статья П. Р. Уоллеса, опубликованная в 1947 г. [13]. Автором было показано, что энергетическая щель между валентной зоной и зоной проводимости отсутствует. Это приводит к выводу о линейности закона дисперсии, то есть линейной зависимости энергии от импульса квазичастицы:

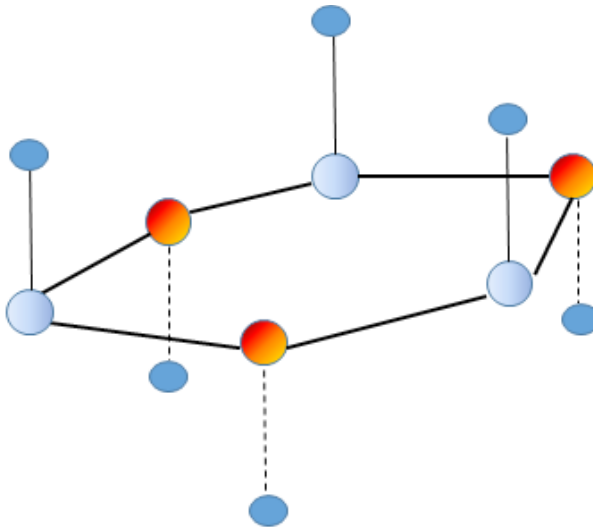
$$E = \hbar kv_F. \quad (1)$$

Здесь  $v_F$  – скорость Ферми;  $E$  – энергия квазичастицы.

Линейный закон дисперсии соответствует безмассовым частицам; следовательно, эффективная масса электрона в графите равна нулю. Обнаружить такое свойство в многослойном объемном кристалле экспериментально было практически невозможно. Однако после получения графена линейный закон дисперсии был обнаружен. Рассчитаны значимые характеристики, например, фазовая скорость электронов Дирака; изучен квантовый эффект Холла, который оказался дробным [14].

Успешные эксперименты привели к появлению теоретических работ, посвященных поведению электронов в графене. К настоящему времени построена достаточно обширная теория. Приведем необходимые для дальнейшего исследования сведения.

Построена зонная теория графена. В частности, на основе линейного закона дисперсии было составлено уравнение Дирака [2; 12]; точнее, уравнение, аналогичное уравнению Дирака, следующего вида:



Р и с. 2. Объемная модель сотовой ячейки  
F i g. 2. The solid model of the cell

$$H = i\hbar \begin{pmatrix} \sigma \nabla & 0 \\ 0 & \sigma^* \nabla \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\sigma$  – двумерный вектор, составленный из матриц Паули.

Общий вид решения уравнения (2) представлен формулой:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \exp(i\theta) \end{pmatrix} \exp(k_x x + k_y y), \quad (3)$$

где  $k$  – квазиимпульс электрона в графене.

Подробно изучена система «электрон – дырка» [2]; сделан вывод о возможности образования электронно-дырочных пар, аналогичных парам Бардина – Купера – Шифера<sup>1</sup>; исследованы свойства указанных пар.

В данной статье продолжено исследование электронных явлений в графене, при этом основное внимание уделено построению достаточно простой, но вполне адекватной модели распространения электронных волн, а также гипотезы об образовании системы «электрон – электрон».

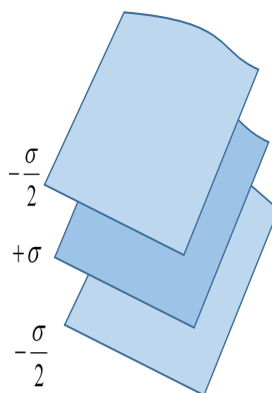
### Материалы и методы

*Построение макроскопической модели*

Если рассматривать макроскопический образец графена, то распределение электронов сверху и снизу кристалла можно считать непрерывным.

Предложим следующую модель.

1. Графен представляет собой двумерную плоскость с поверхностной плотностью заряда  $+\sigma$ . Сверху и снизу кристалла расположены плоскости, состоящие из электронов с зарядовой плотностью  $-\sigma/2$  (рис. 3).



Р и с. 3. Макроскопическая модель графена  
F i g. 3. The macroscopic model of graphene

2. Будем считать, что электроны в верхней и нижней плоскости представляют собой двумерный идеальный газ.

В пользу последнего положения говорит высокая проводимость графена.

Пусть под воздействием внешнего электрического поля в верхней и нижней проводящих плоскостях графена возникло изменение плотности и давления электронов. Будем считать данные изменения достаточно малыми в сравнении с начальными давлением и плотностью.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 + \Delta\sigma, \\ P &= P_0 + \Delta P. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $P$  – давление;  $\sigma$  – плотность.

Проведем исследование предложенной модели, используя известные методы гидродинамики<sup>2</sup>.

### Результаты исследования

Запишем уравнение непрерывности для поверхностной плотности электронов.

<sup>1</sup> Киттель Ч. Введение в физику твердого тела : учеб. пособ. по физике. М. : Книга по требованию, 2012. 789 с.

<sup>2</sup> Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособ. : в 10 т. Т. 6. Гидродинамика. – 4-е изд., испр. М. : Наука, 1989. 626 с. URL: [http://www.immsp.kiev.ua/postgraduate/Biblioteka\\_trudy/GidrodinamikaLanday1986.pdf](http://www.immsp.kiev.ua/postgraduate/Biblioteka_trudy/GidrodinamikaLanday1986.pdf)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \sigma v = 0. \quad (5)$$

Отметим, что данное уравнение справедливо и для поверхностной плотности заряда.

Запишем теперь уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = -\frac{1}{\sigma} \nabla P. \quad (6)$$

Воспользуемся тем, что изменения плотности и давления малы; получим, что:

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial t} + \sigma_0 \operatorname{div} v = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_F}{\partial t} = -\frac{1}{\sigma} \nabla P.$$

Поскольку, согласно предположению, электронный газ является идеальным, то все макроскопические процессы в нем адиабатические. Воспользуемся известным соотношением:

$$\Delta P = \left( \frac{\partial P}{\partial \sigma_0} \right) \Delta \sigma. \quad (8)$$

Из уравнений (7; 8) получим:

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial t} + \left( \frac{\partial P}{\partial \sigma_0} \right) \sigma_0 \operatorname{div} v = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) является волновым уравнением. Для придания ему более удобного вида введем потенциал векторного поля скоростей:

$$v = \operatorname{grad} \phi. \quad (10)$$

Получим, что:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + v_F^2 \Delta \phi = 0. \quad (11)$$

Здесь

$$v_F^2 = \frac{\partial P}{\partial \sigma}. \quad (12)$$

Рассмотрим монохроматическую волну. В данном случае потенциал волны имеет вид:

$$\phi = \operatorname{Re}[\phi_0 e^{-i\omega t}]. \quad (13)$$

Функция  $\phi_0$  удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2} + \frac{\omega^2}{v_F^2} \Delta \phi_0 = 0.$$

Если предположить, что волна распространяется в направлении  $x$ , то:

$$\phi_0 = \operatorname{Re}[A \exp(i\omega x / v_F)],$$

$$\phi = \operatorname{Re}[A e^{-i\omega(t-x/v_F)}]. \quad (14)$$

Из (14) получим дисперсионный закон:

$$\omega / v_F = k. \quad (15)$$

Закон дисперсии является линейным; следовательно, квант электронных волн в графене является безмассовым.

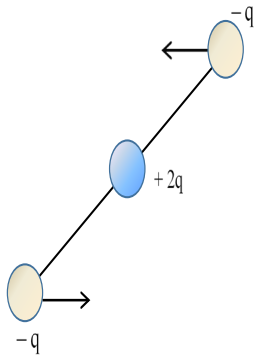
Вопрос о том, фермионом или бозоном является данный квант, в рамках представленной модели не рассматривается.

Выскажем гипотезу, отличную от принятой на данный момент [15]. Предположим, что квазичастица электронной волны в графене является бозоном, но достаточно необычной структуры: он состоит из двух электронов, как известные в теории сверхпроводимости куперовские пары.

При анализе макроскопической модели мы рассматривали только одну плоскость электронного облака, но та-

кое же облако находится с противоположной стороны кристалла. С точки зрения симметрии по ней также должна распространяться волна. Возможно, что при этом образуются пары отрицательно заряженных частиц. Наиболее вероятны пары, состоящие из соседних электронов, находящихся с противоположных сторон кристалла. В таком случае две пары будут образованы внутри одной ячейки, еще два электрона будут связаны с электронами двух соседних ячеек. Каждая такая пара будет иметь две степени свободы.

Для качественного описания данного явления вновь обратимся к рис. 2. В случае образования пары в сотовой ячейке графена расположение отрицательного заряда в верхнем электроде смещено в противоположную сторону от среднего положительного заряда ячейки по сравнению с нижним электроном. Схематично распределение зарядов представлено на рис. 4.



Р и с. 4. Схематичное распределение зарядов в элементарной ячейке графена

F i g. 4. The scheme of the charge distribution in the graphene elementary cell

При движении такой конструкции положительный заряд будет, к примеру, ускорять верхнюю часть и тормозить нижнюю. При этом эффективная масса связанных между собой электронов станет равна нулю, что согласуется с линейным законом дисперсии. Суммарный спин электронов при этом бу-

дет целым, то есть квант электронной волны окажется бозоном.

Определим скорость распространения электронной волны  $v_F$ . Для этого воспользуемся известным термодинамическим соотношением:

$$v_F \approx \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}, \quad (16)$$

где  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ ,  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $M$  – молярная масса электронного газа;  $T$  – температура.

Коэффициент  $\gamma$  можно считать постоянным. Определим его по формуле:

$$\gamma = \frac{i+2}{i}.$$

Пусть квантом электронной волны является электрон Ферми. Учитывая двумерность графена, получим, что  $\gamma = 2$ . При определении температуры следует учитывать, что за электропроводимость отвечают только электроны, находящиеся на уровне Ферми. Температура Ферми составляет  $\sim 5 \cdot 10^4$  К. Таким образом,  $v_F \sim 1,29 \cdot 10^6$  м/с.

Предположим также, что квантом электронной волны является пара связанных электронов, зафиксированных в одном направлении. В таком случае  $v_F \sim 0,92 \cdot 10^6$  м/с.

Экспериментальные данные показывают, что скорость Ферми в графене составляет  $\sim 10^6$  м/с. Это говорит о том, что предложенная в статье математическая модель в целом адекватно описывает электропроводные свойства графена.

#### *Аномальный эффект Холла*

Напомним, что квантовые эффекты при воздействии магнитного поля на проводник с током становятся существенными при низкой температуре в том случае, когда толщина проводника мала [16; 17]. Для экспериментального исследования квантового эффекта Холла

используется система, схожая с плоским конденсатором (рис. 5).

Сам квантовый эффект Холла состоит в том, что при определенных значениях сопротивления

$$R_H = \frac{h}{ke^2} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (17)$$

ток в проводнике отсутствует. Здесь  $h$  – постоянная Планка;  $e$  – заряд электрона;  $k$  – число полностью заполненных уровней Ландау. Данное явление связано с тем, что на плоскости проводника может разместиться конечное число электронов, совершающих вращательное движение.

В графене как в истинно двумерном кристалле также наблюдается квантовый эффект Холла. Однако значения запирающего сопротивления оказываются в два

раза меньше, чем это следует из формулы (17). Поэтому эффект Холла в графене называют аномальным. Объясним данный эффект, исходя из предположения о существовании электронных пар, аналогичных куперовским парам.

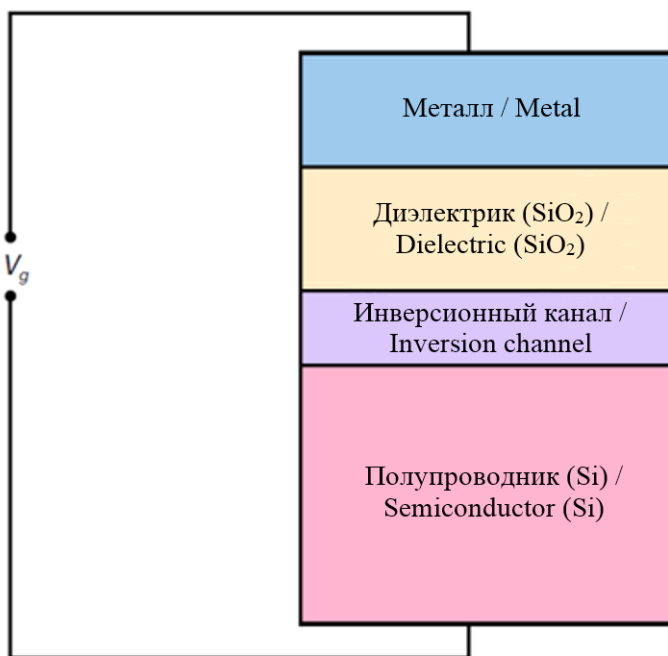
Введем следующие обозначения:  $S_0$  – площадь проводника;  $B$  – вектор магнитной индукции;  $m$  – масса электрона. Пара электронов, естественно, будет обладать вдвое большими массой и зарядом.

Воспользуемся принципом неопределенности Гейзенберга в следующей форме<sup>3</sup>:

$$\Delta E \Delta t \sim h, \quad (18)$$

где  $E$  – энергия частицы;  $t$  – время.

Поскольку при наблюдении квантового эффекта Холла происходит кон-



Р и с. 5. Пример двумерной электронной системы (МДП-структура)

F i g. 5. A two-dimensional electron system (MIS structure)

<sup>3</sup> Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособ. : в 10 т. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). – 4-е изд., испр. М. : Наука, 1989. 768 с. URL: <https://www.math.purdue.edu/~eremenko/dvi/LL.pdf>



такт макроскопического наблюдателя с микроскопической системой, оправданным является использование квазиклассического уровня описания. Учитывая то, что электроны совершают под воздействием постоянного магнитного поля вращательное движение, получим:

$$\Delta E \sim \frac{1}{2} 2m\omega^2 R^2; \quad (19)$$

$$\Delta t \sim \frac{2\pi}{\omega}. \quad (20)$$

Циклическую частоту определим с использованием формулы для силы Лоренца:

$$\omega = \frac{eB}{m}. \quad (21)$$

Из формул (18–21) получим выражение для минимальной площади, занимаемой парой электронов:

$$S_e = \frac{h}{2eB}. \quad (22)$$

Максимальное число электронов, способных разместиться на одном энергетическом уровне Ландау, равно:

$$N_0 = \frac{S_0}{S_e} = \frac{2S_0 eB}{h}.$$

Следовательно, величина запирающего сопротивления будет равна:

$$R_H = \frac{S_0 B}{ekN_0} = \frac{h}{2ke^2}. \quad (23)$$

Таким образом, можно предположить, что аномальный эффект Холла в графене связан с образованием электронных пар, схожих с куперовскими парами.

#### Микромодель графена

В данном случае не будем строить достаточно точную модель графена на микроуровне: такая задача достаточно сложна. Графен по сути является гигантской двумерной молекулой, схожей со сложными ароматическими соединениями. В перспективе возможно использование численных методов, разработанных для расчетов сложных ароматических соединений (например, [18]), по отношению к графену.

Предложим приближенную модель, которая описывает только реакцию пары электронов на возмущение в виде электрического поля.

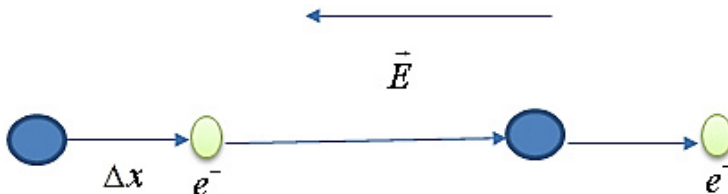
Выскажем следующие предположения.

1. Возмущение достаточно слабо по сравнению с взаимодействием электронов с основным кристаллом.

2. На выбранную пару электронов существенное влияние оказывают только ближайшие к ней узлы решетки.

В данном случае воздействие электрического поля можно представить следующим образом (рис. 6).

Запишем выражение, отражающее изменение потенциальной энергии пары электронов в результате возмущения, учитывая взаимодействие только с ближайшими узлами решетки.



Р и с. 6. Смещение пары электронов в результате внешнего воздействия

F i g. 6. The dislocation of the electron pair as the result of the external effects

$$W = W_1 + W_2 \approx -\frac{2ke^2}{r_0 + \Delta x} + \frac{ke^2}{a_0 + \Delta x} + \frac{ke^2}{a_0 - \Delta x} - \frac{2ke^2}{a_0} + 2eU. \quad (24)$$

Здесь  $a_0$  – расстояние между соседними атомами углерода;  $r_0$  – радиус орбиты  $sp_2$  электрона;  $U$  – разность потенциалов внешнего электрического поля, вызвавшего возмущение.

Второе и третье слагаемое в правой части выражения (24) характеризуют энергию, с которой один электрон из пары «подтягивает» другой электрон. Выстроим данные слагаемые в ряд и ограничимся линейным приближением:

$$\frac{ke^2}{a_0 + \Delta x} + \frac{ke^2}{a_0 - \Delta x} \approx \frac{ke^2}{a_0} \left(1 + \frac{\Delta x}{a_0} + 1 - \frac{\Delta x}{a_0}\right) = \frac{2ke^2}{a_0}. \quad (25)$$

Из выражений (24; 25) следует, что пара электронов при небольшом возмущении будет двигаться в поле с почти постоянным потенциалом. Отсюда непосредственно следует равенство эффективной массы нулю.

В случае постоянной потенциальной энергии решение уравнения Шредингера имеет вид:

$$\Psi(x, y, t) = A \exp(-iEt / \hbar). \quad (26)$$

Здесь  $A$  – некоторая константа.

Воспользуемся принципом неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta E \Delta t \sim \Delta p_0 \Delta x_0 \sim \hbar.$$

Получим, что:

$$\Psi(x, y, t) = A \exp(-ip_0 x_0 / \hbar). \quad (27)$$

Выражение (27) формально совпадает с выражением для волновой функции свободного фотона<sup>4</sup>. В данном смысле графен действительно можно использовать для моделирования некоторых процессов в квантовой электродинамике [19].

Уравнение Шредингера неприменимо к спинам частиц, поскольку является нерелятивистским. Оценим возможные значения спина для предполагаемой квазичастицы, образованной парным взаимодействием электронов, исходя из ее безмассовости.

Для векторной частицы, находящейся в четырехмерном пространстве-времени, справедливо представление:

$$k_\mu e_\mu = k_0 e_0 - k_1 e_1 - k_2 e_2 - k_3 e_3. \quad (28)$$

Для двумерного пространства один из единичных ортогональных векторов отсутствует; допустим, что это вектор  $e_3$ . Для безмассовых частиц справедливо соотношение:

$$k_0 e_0 = k_1 e_1 + k_2 e_2. \quad (29)$$

Таким образом, у квазичастицы в графене будет всего две возможных независимых поляризации.

### Обсуждение и заключение

Основным результатом исследования является макроскопическая модель двумерного кристалла, согласно которой графен можно рассматривать как три плоскости. Одна из них является основным телом кристалла и заряжена положительно, две другие представляют собой почти свободный электронный газ. С использованием предложенной модели в статье описано распространение электронной волны, при этом получен линейный закон дисперсии и проведена оценка фазовой скорости электронной волны. Получен-

<sup>4</sup> Грибов В. Н. Квантовая электродинамика. Ижевск : РХД, 2001. 288 с.

ные результаты подтверждены экспериментальными данными, что говорит об адекватности модели.

Наличие двух электронных плоскостей позволяет предположить, что в графене, помимо взаимодействия «электрон – дырка», возможно образование системы «электрон – электрон». Наличие таких пар объясняет аномальный эффект Холла в графене.

Также в статье построена микромодель воздействия электрического поля на графен. Показано, что пара электронов имеет нулевую эффективную массу. При этом отмечено, что указанный эффект возможен, если вызванное полем возмущение невелико.

Из предположения о наличии электронных пар следует, что безмассовая квазичастица электронной волны является бозоном. Данное положение отличается от общепризнанной теории, со-

гласно которой квазичастица является фермионом.

Из двумерности электронных плоскостей и равенства эффективной массы электронной пары нулю следует, что спин может иметь только два независимых значения.

Статья имеет в основном теоретическую направленность; ее практическая значимость состоит в следующем. Простота основной модели позволяет использовать ее для проведения расчетов макроскопических характеристик графена. Если гипотеза о существовании электронных пар верна, то можно регулировать проводимость графена посредством воздействия на пары, то есть разрушения их или создания условий для их образования. Это можно осуществить, например, с помощью внешнего монохроматического электромагнитного излучения.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Гейм А. К.** Случайные блуждания: непредсказуемый путь к графену // Успехи физических наук. 2011. Т. 181, № 12. С. 1284–1298. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0181.201112e.1284>
2. **Лозовик Ю. Е., Меркулова С. П., Соколик А. А.** Коллективные электронные явления в графене // Успехи физических наук. 2008. Т. 178, № 7. С. 757–776. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200807h.0757>
3. **Geim A. K.** Graphene prehistory // Physica Scripta. 2012. Vol. 146, P. 014003. DOI: <https://doi.org/10.1088/0031-8949/2012/T146/014003>
4. **Морозов С. В., Новоселов К. С., Гейм А. К.** Электронный транспорт в графене // Успехи физических наук. 2008. Т. 178, № 7. С. 776–780. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200807i.0776>
5. **Рутьков Е. В., Галль Н. Р.** Необычные оптические свойства графена на поверхности Rh // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2014. Т. 100. № 9-10. С. 708–711.
6. **Yudakov A. V., Volodchenkov A. M., Yudenkova M. A.** Thermodynamic foundations of the graphene optical properties // T-Comm. 2018. Vol. 12, no. 11. P. 79–83. URL: <http://media-publisher.ru/wp-content/uploads/2018/12/Nom-11-2018-sait.pdf>
7. Mechanical properties of graphene containing elongated tetravacancies (575757-666-5757 defects) / A. S. Kochnev [et al.] // Reviews on Advanced Materials Science. 2017. Vol. 48, no 2. P. 142–146. URL: [http://www.ipme.nw.ru/e-journals/RAMS/no\\_24817/05\\_24817\\_kochnev.pdf](http://www.ipme.nw.ru/e-journals/RAMS/no_24817/05_24817_kochnev.pdf)
8. The electronic properties of graphene / A. H. C. Neto [et al.] // Reviews of Modern Physics. 2009. Vol. 81, issue 1. P. 109–162. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.109>
9. Optical transparency of graphene layers grown on metal surfaces / E. V. Rut'kov [et al.] // Semiconductors. 2017. Vol. 51, issue 4. P. 492–497. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063782617040182>
10. The mechanics of graphene nanocomposites: a review / R. J. Young [et al.] // Composites Science and Technology. 2012. Vol. 72, issue 12. P. 1459–1476. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2012.05.005>

11. **Yudnikov A. V., Terentyev S. E., Kovaleva A. E.** Informational Description of Systemic Crises // International Journal of Engineering & Technology. 2018. Vol. 7, no. 4.36. P. 899–903. DOI: <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.36.24917>
12. **Katsnelson M. I.** Graphene: carbon in two dimensions. New York : Cambridge University Press, 2012. 351 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139031080>
13. **Wallace P. R.** The band theory of graphite // Physical Review. 1947. Vol. 71, issue 9. P. 622–634. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.622>
14. **Novoselov K. S., Geim A. K.** Quantum hall effect in graphene // 2008 Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest. IEEE, 2008. P. 488–489. DOI: <https://doi.org/10.1109/CPEM.2008.4574866>
15. From one electron to one hole: quasiparticle counting in graphene quantum dots determined by electrochemical and plasma etching / S. Neubeck [et al.] // Small. 2010. Vol. 6, issue 14. P. 1469–1473. DOI: <https://doi.org/10.1002/sml.201000291>
16. **Кибис О. В.** Квантовый эффект Холла // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 9. С. 89–93. URL: <http://stat.phys.spbu.ru/Method/Holl2.pdf>
17. **Laughlin R. B.** Quantized Hall conductivity in two dimensions // Physical Review B. 1981. Vol. 23, issue 10. P. 5632–5633. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.23.5632>
18. **Грибов Л. А.** Метод расчета уровней энергии нанообъектов с периодической структурой скелета. // Журнал структурной химии. 2010. Т. 51, № 1. С. 131–136. URL: <http://www.sibran.ru/upload/iblock/8a9/8a94d0a31d5f2b6abf1cda9fbb9da6c.pdf>
19. **Katsnelson M. I., Novoselov K. S.** Graphene: new bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics // Solid State Communications. 2007. Vol. 143, issues 1-2. P. 3–13. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ssc.2007.02.043>

*Поступила 18.03.2019; принята к публикации 06.05.2019; опубликована онлайн 28.06.2019*

*Об авторах:*

**Юденков Алексей Витальевич**, заведующий, кафедра менеджмента и естественно-научных дисциплин, ФГБОУ ВО «Смоленская государственная академия физической культуры, спорта и туризма» (214000, Российская Федерация, г. Смоленск, пр. Гагарина, д. 23), доктор физико-математических наук, профессор, Publons: <https://publons.com/researcher/2929429/alexey-vitalevich>, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8329-1146>, [aleks-yudnikov@mail.ru](mailto:aleks-yudnikov@mail.ru)

**Володченков Александр Михайлович**, заведующий, кафедра естественнонаучных и гуманитарных дисциплин, Смоленский филиал ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова» (214030, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Нормандия-Неман, д. 21), кандидат физико-математических наук, доцент, Publons: <https://publons.com/researcher/2927666/aleksandr-volodchenkov>, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9314-7324>, [alexmw2012@yandex.ru](mailto:alexmw2012@yandex.ru)

**Юденкова Мария Алексеевна**, студентка, ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9), Publons: <https://publons.com/researcher/2929527/maria-iudenkova>, <https://orcid.org/0000-0003-3226-2403>, [mayudenkova@gmail.com](mailto:mayudenkova@gmail.com)

*Заявленный вклад соавторов:*

А. В. Юденков – научное руководство, формулирование основной концепции исследования и структуры статьи, математическое описание моделей, написание первоначального варианта статьи, формулирование выводов; А. М. Володченков – формулирование задач, анализ научных источников, обсуждение результатов; М. А. Юденкова – обзор литературы, верстка и редактирование текста.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

## REFERENCES

1. Geim A.K. Random walk: Unpredictable way to graphene. *Uspekhi fizicheskikh nauk* = Physics–Uspekhi. 2011; 181(12):1284–1298. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0181.201112e.1284> (In Russ.)
2. Lozovik Yu.E., Merkulova S.P., Sokolik A.A. Collective electron phenomena in graphene. *Uspekhi fizicheskikh nauk* = Physics–Uspekhi. 2008; 178(7):757–776. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200807h.0757> (In Russ.)
3. Geim A.K. Graphene prehistory. *Physica Scripta*. 2012; 146:014003. DOI: <https://doi.org/10.1088/0031-8949/2012/T146/014003>
4. Morozov S.V., Novosylov K.S., Geim A.K. Electronic transport in graphene. *Uspekhi fizicheskikh nauk* = Physics–Uspekhi. 2008; 178(7):776–780. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200807i.0776> (In Russ.)
5. Rutkov E.V., Gall N.R. Unusual optical properties of graphene on an Rh surface. *Pisma v Zhurnal eksperimentalnoy i teoreticheskoy fiziki* = JETP Letters. 2014; 100(9–10):708–711. (In Russ.)
6. Yudenkov A.V., Volodchenkov A.M., Yudenkova M.A. Thermodynamic foundations of graphene optical properties. *T-Comm*. 2018; 12(11):79–83. Available at: <http://media-publisher.ru/wp-content/uploads/2018/12/Nom-11-2018-sait.pdf>
7. Kochnev A.S., Ovidko I.A., Semenov B.N., Sevastyanov Ya.A. Mechanical properties of graphene containing elongated tetravacancies (575757-666-5757 defects). *Reviews on Advanced Materials Science*. 2017; 48(2):142–146. Available at: [http://www.ipme.nw.ru/e-journals/RAMS/no\\_24817/05\\_24817\\_kochnev.pdf](http://www.ipme.nw.ru/e-journals/RAMS/no_24817/05_24817_kochnev.pdf)
8. Neto A.H.C., Guinea F., Peres N.M.R., Novoselov K.S., Geim A.K. The electronic properties of graphene. *Reviews of Modern Physics*. 2009; 81(1):109–162. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.109>
9. Rut'kov E.V., Lavrovskaya N.P., Sheshnya E.S., Gall N.R. Optical transparency of graphene layers grown on metal surfaces. *Semiconductors*. 2017; 51(4):492–497. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063782617040182>
10. Young R.J., Kinloch I.A., Gong L., Novoselov K.S. The mechanics of graphene nanocomposites: A review. *Composites Science and Technology*. 2012; 72(12):1459–1476. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2012.05.005>
11. Yudenkov A.V., Terentyev S.E., Kovaleva A.E. Informational description of systemic crises. *International Journal of Engineering & Technology*. 2018; 7(4.36):899–903. DOI: <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.36.24917>
12. Katsnelson M.I. Graphene: Carbon in two dimensions. New York: Cambridge University Press; 2012. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139031080>
13. Wallace P.R. The band theory of graphite. *Physical Review*. 1947; 71(9):622–634. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.622>
14. Novoselov K.S., Geim A.K. Quantum Hall effect in graphene. In: *2008 Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest*. IEEE; 2008. p. 488–489. DOI: <https://doi.org/10.1109/CPEM.2008.4574866>
15. Neubeck S., Ponomarenko L.A., Freitag F., Novoselov K.S., Giesbers A.J.M., Zeitler U., et al. From one electron to one hole: Quasiparticle counting in graphene quantum dots determined by electrochemical and plasma etching. *Small*. 2010; 6(14):1469–1473. DOI: <https://doi.org/10.1002/smll.201000291>
16. Kibis O.V. Hall quantum effect. *Sorosovskiy obrazovatelnyy zhurnal* = Soros Educational Journal. 1999; 9:89–93. Available at: <http://stat.phys.spbu.ru/Method/Holl2.pdf> (In Russ.)
17. Laughlin R.B. Quantized Hall conductivity in two dimensions. *Physical Review B*. 1981; 23(10):5632–5633. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.23.5632>
18. Gribov L.A. A method to calculate the energy levels of nanoobjects with a periodic framework structure. *Zhurnal strukturnoy khimii* = Journal of Structural Chemistry. 2010; 51(1):131–136. Available at: <http://www.sibran.ru/upload/iblock/8a9/8a94d0a31d5f2b6abf1cda9fbb9da6c.pdf> (In Russ.)

19. Katsnelson M.I., Novoselov K.S. Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics. *Solid State Communications*. 2007; 143(1-2):3-13. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ssc.2007.02.043>

*Received 18.03.2019; revised 06.05.2019; published online 28.06.2019*

*About authors:*

**Aleksey V. Yudenkov**, Head, Chair of Management, Sciences and Humanities, Smolensk State Academy of Physical Culture, Sport and Tourism (23 Prospekt Gagarina, Smolensk 214000, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Publons: <https://publons.com/researcher/2929429/alexey-vitalevich>, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8329-1146>, [aleks-ydenkov@mail.ru](mailto:aleks-ydenkov@mail.ru)

**Aleksandr M. Volodchenkov**, Head, Chair of Humanities and Sciences, Smolensk Branch of Plekhanov Russian University of Economics (21 Normandia-Neman St., Smolensk 214030, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Publons: <https://publons.com/researcher/2927666/aleksandr-volodchenkov>, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9314-7324>, [alexmw2012@yandex.ru](mailto:alexmw2012@yandex.ru)

**Maria A. Iudenkova**, Student, Moscow Institute of Physics and Technology (9 Institutskiy Pereulok lane, Dolgoprudnyy 141701, Russia), Publons: <https://publons.com/researcher/2929527/maria-iudenkova>, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3226-2403>, [mayudenkova@gmail.com](mailto:mayudenkova@gmail.com)

*Contribution of the authors:*

A. V. Yudenkov – the scientific guidance, basic concept of research and structure of the article, mathematical description of the models, draft article, conclusion; A. M. Volodchenkov – tasking, analysing research studies and scholarly works, discussion; M. A. Iudenkova – reviewing the literature, editing and desktop publishing.

*All authors have read and approved the final version of the paper.*