http://vestnik.mrsu.ru ISSN Print 0236-2910
ISSN Online 2313-0636

УДК 517.91 DOI: 10.15507/0236-2910.028.201803.344-351

Устойчивость относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях «частичного» положения равновесия нелинейных систем дифференциальных уравнений

П. П. Липасов, В. Н. Щенников
ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия)
**pashka0113@yandex.ru*

Введение. В процессе математического моделирования динамических процессов не удается учесть все действующие в них силы. Чтобы математическая модель наиболее точно описывала динамические процессы, в них включают слагаемые, соответствующие постоянно действующим возмущениям. Подобные меры необходимы, например, при решении прикладных задач. В данной статье рассматривается случай, когда система допускает «частичное» положение равновесия. Целью работы является доказательство теоремы об устойчивости «частичного» положения равновесия при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени.
Материалы и методы. Объектами исследования являются нелинейные системы дифференциальных уравнений, допускающие «частичное» положение равновесия. Теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях «частичного» положения равновесия, малых в каждый момент времени, доказываются с использованием второго метода Ляпунова.
Результаты исследования. С введением устойчивости относительно части переменных появилась потребность введения устойчивости при постоянно действующих возмущениях относительно части фазовых переменных. Первые теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях относительно части фазовых переменных были получены А. С. Озиранером. Следует отметить, что в настоящее время не сформулировано теорем об устойчивости при постоянно действующих возмущениях «частичного» положения равновесия, что свидетельствует об актуальности данной статьи.
Обсуждение и заключения. Доказанная в работе теорема 3 является развитием математической теории устойчивости. Полученные результаты применимы в механике управляемого движения.

Ключевые слова: постоянно действующее возмущение, устойчивость при постоянно действующих возмущениях, «частичное» положение равновесия, дифференциальное уравнение, нелинейная система

Для цитирования: Липасов П. П., Щенников В. Н. Устойчивость относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях «частичного» положения равновесия нелинейных систем дифференциальных уравнений // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28, № 3. С. 344–351. DOI: https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201803.344-351

Stability with Respect to a Part of Variables under Constant Perturbations of the Partial Equilibrium Position of Differential Equation Nonlinear Systems

P. P. Lipasov*, **V. N. Shchennikov**
National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)
*pashka0113@yandex.ru

Introduction. It is impossible to take into account all the forces acting in the process of mathematical modeling of dynamic processes. In order that mathematical models the most accurately describe the dynamic processes, they must include the terms that correspond the constant perturbations. These problems arise in applied tasks. In this paper we consider the case when the system allows for the partial equilibrium position. The aim of this work is to prove the stability theorem for the partial equilibrium position at constant perturbations, which are small at every instant.
Materials and Methods. The research objects are nonlinear systems of differential equations that allow for a partial equilibrium position. Using the second Lyapunov method, there are proved the stability theorems for the constant perturbations of the partial equilibrium position, which are small at every instant.
Results. Together with the introduction of stability for a part of the variables, it has become necessary to introduce stability for the part of phase variables under constant perturbations. The first stability theorem of the part of phase variables under constant perturbations was obtained by A. S. Oziraner. In this work, we prove a theorem of the stability of the constant perturbations of the partial equilibrium position, small at every instant. It should be noted that there is no stability theorems of constant perturbations for the partial equilibrium position. Thus, the theorem proved in this work is of a pioneer nature.
Conclusions. The theorem 3 proved in the work is the development of the mathematical theory of stability. The results of this work are applicable in the mechanics of controlled motion, nonlinear system.

Keywords: constantly acting disturbances, stability at constantly acting disturbances, partial equilibrium position, differential equation

For citation: Lipasov P. P., Shchennikov V. N. Stability with Respect to a Part of Variables under Constant Perturbations of the Partial Equilibrium Position of Differential Equation Nonlinear Systems. *Vestnik Mordovskogo universiteta* = Mordovia University Bulletin. 2018; 28(3):344–351. DOI: https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201803.344-351

Введение

Во многих прикладных задачах присутствуют постоянно действующие возмущения. При этом часто известны только их наибольшее и наименьшее значения. Отметим, что задача об устойчивости при постоянно действующих возмущениях является классической задачей общей теории устойчивости. Ее решением занимались многие ученые (Г. Н. Дубошин [1], И. Г. Малкин [2], В. И. Зубов[1], Н. Н. Красовский [3], А. А. Тихонов [4], С. И. Горшин [5], А. Страусс и А. Дж. Йорк [6], К. Кордуняну [7] и др.). Во всех указанных работах используются методы теории устойчивости Ляпунова.

В данной работе продолжаются исследования устойчивости при постоянно действующих возмущениях. В отличие от ранее рассматриваемых систем дифференциальных уравнений, нами изучаются системы дифференци-

[1] **Зубов В. И.** Математические методы исследования систем автоматического регулирования. – 2-е изд. Л. : Машиностроение, 1974. 336 с.

альных уравнений, допускающих «частичное» положение равновесия (см., например, работы [8–9]). Известно, что в настоящее время не сформулировано теорем об устойчивости «частичного» положения равновесия при постоянно действующих возмущениях, что свидетельствует об актуальности данной статьи.

Обзор литературы

Задача об устойчивости при постоянно действующих возмущениях является классической задачей теории устойчивости[2–3].

В настоящей статье исследуется вопрос устойчивости «частичного» положения равновесия нелинейных систем, доказывается теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени.

Достаточно полный обзор устойчивости при постоянно действующих возмущениях относительно всех фазовых переменных содержится в монографии[4], а также, кроме отмеченных, в работах Р. Габасова [10], В. Е. Гермаидзе и Н. Н. Красовского [11], С. И. Горшина [12]. С введением устойчивости относительно части фазовых переменных появилась потребность в определении устойчивости при постоянно действующих возмущениях и доказательства соответствующих теорем. Первые теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях относительно части фазовых переменных были доказаны А. С. Озиранером[5].

Следует отдельно упомянуть работу А. Я. Савченко [13], в которой доказана теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях в предположении, что исходная система устойчива.

Материалы и методы

Для получения новых результатов по рассматриваемой тематике были использованы известные результаты теорем об устойчивости положения равновесия нелинейных систем при постоянно действующих возмущениях И. Г. Малкина[6] и В. И. Зубова[7]. Следует отметить, что достаточно полный обзор по указанной тематике содержится в книге А. А. Мартынюка[8].

Результаты исследования

С целью получения новых результатов приведем известную теорему об устойчивости положения равновесия нелинейной системы дифференциальных уравнений при постоянно действующих возмущениях.

Для этого рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ f(t,0) \equiv 0, \qquad (1)$$

где

$$x \in R^n,\ f(t,x) = \left(f_1(t,x), \ldots f_n(t,x)\right)^T.$$

Предположим, что правые части системы (1) определены в области

$$\Omega = \{t, x : t \geq t_0 \geq 0, x \leq H, 0 < H = const\} \qquad (2)$$

непрерывными по совокупности переменных и допускают единственность решения задачи Коши при начальных данных из области (2). Здесь и далее:

---

[2] **Малкин И. Г.** Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. 530 с.

[3] **Зубов В. И.** Математические методы исследования систем автоматического регулирования. – 2-е изд. Л. : Машиностроение, 1974. 336 с.

[4] **Мартынюк А. А., Гутовски Р.** Интегральные неравенства и устойчивость движения. Киев : Наукова думка, 1979. 270 с.

[5] **Румянцев В. В., Озиранер А. С.** Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М. : Наука, 1987. 256 с.

[6] **Малкин И. Г.** Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. 530 с.

[7] **Зубов В. И.** Математические методы исследования систем автоматического регулирования. – 2-е изд. Л. : Машиностроение, 1974. 336 с.

[8] **Мартынюк А. А., Гутовски Р.** Интегральные неравенства и устойчивость движения. Киев : Наукова думка, 1979. 270 с.

норма вектора – евклидова, верхний индекс ^{T} означает транспонирование.

Кроме системы (1), будем рассматривать также систему

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = f(t,\tilde{x}) + R(t,\tilde{x}),\ R(t,0) \neq 0, \quad (3)$$

где векторные функции $R(t,\tilde{x})$ являются постоянно действующими возмущениями. Постоянно действующие возмущения будем считать заданными в области (2) и удовлетворяющими тем же условиям, что и $f(t,x)$.

При постоянно действующих возмущениях $R(t,\tilde{x})$ точно неизвестны[9]. Как уже отмечено, $R(t,0) \neq 0$. Будем считать их достаточно малыми, т. е. $\|R(t,x)\| \leq \gamma$, где $\gamma > 0$ является достаточно малой величиной.

Определение 1

Нулевое решение $x = 0$ системы (1) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для произвольного $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < H$ существуют числа $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при $\|R(t,\tilde{x})\| \leq \gamma$ для любых начальных данных $\|x_0\| < \delta$ выполняется неравенство $\|\tilde{x}(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0 \geq 0$. Здесь $\tilde{x}(t,t_0,\tilde{x}_0)$ – произвольное решение системы (3), $(t_0,\tilde{x}_0) \in \Omega$; величина $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно малой[10].

Теорема 1

Пусть для системы (1) существует определенно-положительная функция $V(t,x)$, допускающая бесконечно малый высший предел, полная производная которой по времени t вдоль решений системы (1) есть определенно-отрицательная функция, и если в области (2) $\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \leq N$, $0 < N = const$, то нулевое решение системы (1) является устойчивым при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени.

Данная теорема с доказательством содержится в монографиях И. Г. Малкина и В. И. Зубова[11–12].

Приведем далее определение устойчивости положения равновесия $x = 0$ системы (1) при постоянно действующих возмущениях относительно части фазовых переменных.

Введем обозначение $x = \left(y^T, z^T\right)^T$. Здесь $y = (x_1,\ldots,x_k)^T$, $z = (x_{k+1},\ldots,x_n)^T$

Определение 2

Нулевое решение системы (1) $x = 0$ y-устойчиво[13] при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени, если для любого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < H$ существуют $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что всякое решение $\tilde{x}(t,t_0,\tilde{x}_0)$ и $\|\tilde{x}_0\| < \delta$ системы (3) удовлетворяет неравенству $\|\tilde{x}(t,t_0,\tilde{x}_0)\| < \varepsilon$ при любом $t \geq t_0$ и достаточно малом $\gamma > 0$, где $R(t,\tilde{x}) < \gamma$.

В этом определении речь идет об устойчивости при постоянно действующих возмущениях относительно переменных $y_1,\ldots,y_k$.

Теорема 2

Пусть для системы (1) существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям[14]:

$$a(\|y\|) \leq V(t,x) \leq b(\|x\|),$$

$$\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{(1)} \leq -c(\|x\|),$$

где $a(\|y\|)$, $b(\|x\|)$ и $c(\|x\|)$ – непрерывные положительные возрастающие функции, причем $a(\|y\|) \to \infty$ при $\|y\| \to \infty$.

---

[9] **Малкин И. Г.** Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. 530 с.

[10] **Зубов В. И.** Математические методы исследования систем автоматического регулирования. – 2-е изд. Л. : Машиностроение, 1974. С. 176–177.

[11] **Малкин И. Г.** Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. С. 302.

[12] **Зубов В. И.** Математические методы исследования систем автоматического регулирования. – 2-е изд. Л. : Машиностроение, 1974. С. 176–177.

[13] **Румянцев В. В., Озиранер А. С.** Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М. : Наука, 1987. С. 193.

[14] Там же.

Предположим далее, что система (1) представима в виде

$$\frac{dy}{dt} = f_1(t, y), \qquad (4_1)$$

$$\frac{dz}{dt} = f_2(t, y, z), \qquad (4_2)$$

а система (3) в виде

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = f_1(t, \tilde{y}) + r_1(t, \widetilde{y}, \tilde{z}), \qquad (5_1)$$

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = f_2(t, \tilde{y}, \tilde{z}) + r_2(t, \widetilde{y}, \tilde{z}), \qquad (5_2)$$

Будем считать, что

$$f_1(t, 0) = 0,\ r_1(t, 0, \tilde{z}) \neq 0,$$

$$r_1(t, \tilde{y}, \tilde{z}) \leq \tilde{\gamma},\ 0 < \tilde{\gamma} = const$$

Введем обозначение

$$y = \left(y^{(1)^T}, y^{(2)^T}\right)^T,$$

$$y^{(1)} = (y_1, \ldots y_l), y^{(2)} = (y_{l+1}, \ldots y_k).$$

Областью определения систем (4_1– 4_2; 5_1–5_2) примем

$$\Omega_1 = \{t, y^{(1)}, y^{(2)}, z : t \geq t_0 \geq 0,$$

$$\left\|y^{(1)}\right\| \leq H,\ \left\|y^{(2)}\right\| < \infty, \|z\| < \infty\}.$$

При этом также предполагается, что в области Ω_1 правые части систем (4_1–4_2; 5_1–5_2) непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решений задач Коши.

Далее в системе (4_1–4_2) будем считать, что y = 0 является «частичным» положением равновесия, т. е. $(0^T, z^T)^T$ – «частичное» положение равновесия системы (4_1–4_2) с наблюдаемой (контролируемой) частью начальных условий $y^{(1)}(t_0) = (y_1(t_0), \ldots, y_l(t_0))^T$.

Докажем теорему об устойчивости при постоянно действующих возмущениях относительно части фазовых переменных $y^{(1)} = (y_1, \ldots, y_l)^T$ или, короче, об $y^{(1)}$-устойчивости при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени, с наблюдаемой (контролируемой) частью начальных условий фазовых переменных $y^{(1)}(t_0) = (y_1(t_0), \ldots, y_l(t_0))^T$.

Теорема 3

Предположим, что для системы (4_1–4_2) существует функция $v(t, y)$, удовлетворяющая условиям:

$$\bar{a}\left(\left\|y^{(1)}\right\|\right) \leq v(t, y) \leq \bar{b}\left(\left\|y^{(1)}\right\|\right), \qquad (6)$$

$$\left.\frac{dv(t, y)}{dt}\right|_{(4_1)} \leq -\bar{c}\left(\left\|y^{(1)}\right\|\right), \qquad (7)$$

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial y}\right\| \leq \bar{N}, 0 < \bar{N} < \infty, \qquad (8)$$

где $\bar{a}\left(\left\|y^{(1)}\right\|\right)$, $\bar{b}\left(\left\|y^{(1)}\right\|\right)$ и $\bar{c}\left(\left\|y^{(1)}\right\|\right)$ – непрерывные положительные возрастающие функции, причем $\bar{a}\left(y^{(1)}\right) \to \infty$ при $\left\|y^{(1)}\right\| \to \infty$. Тогда нулевое решение систем (4_1–4_2) является $y^{(1)}$-устойчивым при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени, с наблюдаемой частью начальных условий $y_0^{(1)} = (y_1(t_0), \ldots, y_l(t_0))$.

Доказательство

Найдем полную производную от функции $v(t, y)$ по времени t на решениях системы (5_1). В результате получим:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(5_1)} = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4_1)} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}, r_1(t, \widetilde{y}, \tilde{z})\right). \qquad (9)$$

С учетом оценки (8) из равенства (9) получим дифференциальное неравенство

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(5_1)} \leq -K^2 + N\gamma.$$

Выберем γ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(5_1)} \leq -K_1, K_1 > 0, K_1 = -K^2 + N\gamma \qquad (10)$$

при $\left\|y^{(1)}\right\| \leq H, \left\|y^{(2)}\right\| < \infty, \|z\| < \infty$ и достаточно малом $\gamma > 0$. Выберем также произвольное положительное число $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \le H$. При этом допустим, что $\varepsilon > 0$ может быть и достаточно малым. Возьмем далее произвольное решение $\tilde{y}(t, t_0, \tilde{y}_0)$ системы (5_1) с $\|\tilde{y}_0\| < \delta(\varepsilon)$ Здесь $\delta(\varepsilon) > 0$ не зависит от t_0, т. к. существуют неравенства (6). Если функция $v\left(t, \tilde{y}^{(1)}\right)$ является непрерывной и $v(t, 0) = 0$, то найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $v(t_0, \tilde{y}_0) < a(\varepsilon)$. Покажем справедливость неравенства $v(t, \tilde{y}(t, t_0, \tilde{y}_0)) < a(\varepsilon)$ при $t \ge t_0$. Допустим, что при $t = t_1$ справедливо $v(t, \tilde{y}(t, t_0, \tilde{y}_0)) = a(\varepsilon)$. Однако тогда в силу (10) получим $v(t, \tilde{y}(t, t_0, \tilde{y}_0)) < 0$, $v(t_1, \tilde{y}(t_1, t_0, \tilde{y}_0)) = a(\varepsilon)$, что противоречит условию (10). Таким образом, $a\left(\left\|\tilde{y}^{(1)}\right\|\right) \le v(t, \tilde{y}(t, t_0, \tilde{y}_0)) < a(\varepsilon)$. В силу того, что функция $a(\|\tilde{y}^{(1)}\|)$ является непрерывной и возрастающей и, кроме того, $a(\|\tilde{y}^{(1)}\|) \to \infty$ при $\left\|\tilde{y}^{(1)}\right\| \to \infty$, то для нее существует обратная функция. Следовательно, справедливо неравенство $\|\tilde{y}^{(1)}(t, t_0, \tilde{y}_0)\| < \varepsilon$ при $t \ge t_0$ и достаточно малых $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\gamma > 0$.

Доказательство завершено.

Примечание. Доказательство теоремы 3 проведено по алгоритму доказательств теорем 1–2, т. е. по алгоритму доказательства теорем И. Г. Малкина, В. И. Зубова и А. С. Озиранера: 1) определяется область, в которой $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(5_1)} < 0$ на решениях системы (3); 2) с учетом того, что функция $v\left(t, y^{(1)}\right)$ является определенно-положительной, допускает бесконечно малый высший предел, и, кроме того, $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(5_1)} < 0$, проверяется условие $\|y^{(1)}(t, t_0, y_0)\| < \varepsilon$ при $t \ge t_0$ и достаточно малых $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\gamma > 0$. Если условия 1) и 2) выполняются, то это и означает $y^{(1)}$-устойчивость «частичного» положения равновесия $y = 0$ системы $(4_1$–$4_2)$ при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени.

Обсуждение и заключения

Полученные в данной работе результаты являются развитием теории устойчивости по части фазовых переменных. Достоинством результата является то, что доказанная теорема уникальна, поскольку теорем об устойчивости при постоянно действующих возмущениях «частичного» положения равновесия до сих пор не сформулировано. Доказательство теоремы было проведено по алгоритму доказательства теорем И. Г. Малкина, В. И. Зубова и А. С. Озиранера.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Дубошин Г. Н.** К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений // Тр. Гос. астроном. ин-та им. Штернберга. 1940. № 114. С. 156–164.

2. **Малкин И. Г.** Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII, № 3. С. 241–245.

3. **Красовский Н. Н.** Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях // Прикладная математика и механика. 1954. № 18. С. 95–102.

4. **Тихонов А. А.** Об устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях // Вестник Ленинградского университета. 1965. № 1. С. 95–101.

5. **Горшин С. И.** Второй метод Ляпунова и применение к устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Второй метод Ляпунова и его применение в энергетике : тр. семинара-симпозиума. 1956. Ч. 1. С. 5–34.

6. **Strauss A., Yorke A. J.** Identifying perturbations which preserved asymptotic stability // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 22, № 2. P. 513–518.

7. **Corduneanu C.** Sur la stabilite partielle // Rev. Roumaine math. Pures. Appl. 1964. Vol. 9, № 3. P. 229–236. URL: https://zbmath.org/?q=an:0134.07104

8. **Воротников В. И.** Два класса задач частичной устойчивости: к унификации понятий и единым условиям разрешимости // Доклады РАН. 2002. Т. 384, № 1. С. 47–51.

9. **Воротников В. И.** Об устойчивости и устойчивости по части переменных частичных положений равновесия нелинейных динамических систем // Доклады РАН. 2003. Т. 389, № 3. С. 332–337.

10. **Габасов Р.** Об устойчивости решения дифференциально-операторных уравнений при постоянно действующих возмущениях // Известия вузов. Математика. 1962. Т. 30, № 5. С. 29–38. URL: http://www.mathnet.ru/links/f63cae17d524fd7cd7a5597ffafbcb68/ivm2096.pdf

11. **Гермаидзе В. Е., Красовский Н. Н.** Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 6. С. 769–775.

12. **Горшин С. И.** О некоторых критериях устойчивости при постоянно действующих возмущениях. Известия вузов. Математика. 1967. № 11. С. 17–20. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=3231&option_lang=rus

13. **Савченко А. Я.** Об устойчивости движений консервативных механических систем при постоянно действующих возмущениях. Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38, № 2. С. 240–245.

Поступила 18.04.2018; принята к публикации 07.06.2018; опубликована онлайн 20.09.2018

Об авторах:

Липасов Павел Петрович, магистр кафедры фундаментальной информатики и информационных технологий, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), Researcher ID: N-7266-2018, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9524-7353, pashka0113@yandex.ru

Щенников Владимир Николаевич, профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), доктор физико-математических наук, Researcher ID: Q-3912-2018, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5230-3482, du@math.mrsu.ru

Заявленный вклад соавторов:

П. П. Липасов – доказательство теоремы; В. Н. Щенников – постановка задачи, определение методов исследования.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

REFERENCES

1. Duboshin G. N. [On the question of the stability of the motion of relatively constant perturbations]. *Tr. Gos. astronom. in-ta im. Shternberga* = Proceedings of Shternberg State Astronomical Institute. 1940; 114:156–164 (In Russ.)

2. Malkin I. G. [On stability under constantly acting perturbations]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* = Applied Mathematics and Mechanics. 1944; VIII(3):241–245 (In Russ.)

3. Krasovskiy N. N. [On the stability of motion as a whole with constantly acting perturbations]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* = Applied Mathematics and Mechanics. 1954; 18:95–102 (In Russ.)

4. Tikhonov A. A. [On the stability of motion under constantly acting perturbations]. *Vestnik Leningradskogo universiteta* = Leningrad University Bulletin. 1965; 1:95–101 (In Russ.)

5. Gorshin S. I. [The second Lyapunov method and application to stability under constantly acting perturbations]. *Vtoroy metod Lyapunova i yego primeneniye v energetike: tr. seminara-simpoziuma* = The second Lyapunov method and its application in power engineering: Proceedings of symposium seminar. 1956; 1:5–34 (In Russ.)

6. Strauss A., Yorke A. J. Identifying perturbations which preserved asymptotic stability. Bull. Amer. Math. Soc. 1969; 22(2):513–518.

7. Corduneanu C. Sur la stabilite partielle. Rev. Roumaine math. Pures. Appl. 1964; 9(3):229–236. URL: https://zbmath.org/?q=an:0134.07104

8. Vorotnikov V. I. [Two classes of partial stability problems: to the unification of concepts and to unified solvability conditions]. *Doklady RAN* = Reports of RAS. 2002; 384(1):47–51 (In Russ.)

9. Vorotnikov V. I. [On stability and stability with respect to part of variable partial equilibrium positions of nonlinear dynamical systems]. *Doklady RAN* = Reports of RAS. 2003; 389(3):332–337.

10. Gabasov R. [On the stability of the solution of differential-operator equations under constantly acting perturbations]. *Izvestiya vuzov. Matematika* = Proceedings of Higher Schools. Mathematics. 1962; 30(5):29–38. Available at: http://www.mathnet.ru/links/f63cae17d524fd7cd7a5597ffafbcb68/ivm2096.pdf (In Russ.)

11. Germaidze V. Ye., Krasovskiy N. N. [On stability under constantly acting perturbations]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* = Applied Mathematics and Mechanics. 1957; 21(6):769–775 (In Russ.)

12. Gorshin S. I. [On some stability criteria for constantly acting perturbations]. *Izvestiya vuzov. Matematika* = Proceedings of Higher Schools. 1967; 11:17–20. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=3231&option_lang=rus (In Russ.)

13. Savchenko A. Ya. [On the stability of the motions of conservative mechanical systems under constantly acting perturbations]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* = Applied Mathematics and Mechanics. 1974; 38(2):240–245 (In Russ.)

Received 18.04.2018; revised 07.06.2018; published online 20.09.2018

About authors:

Pavel P. Lipasov, Master Degree Student, Chair of Fundamental Informatics and Information Technologies, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Researcher ID: N-7266-2018, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9524-7353, pashka0113@yandex.ru

Vladimir N. Shchennikov, Professor, Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), D. Sc. (Physics and Mathemetics), Researcher ID: Q-3912-2018, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5230-3482, du@math.mrsu.ru

Authors' contribution:

P. P. Lipasov – proof of theorem; V. N. Shchennikov – introduction of the research task, the definition of research methods.

All authors have read and approved the final version of the paper.