http://vestnik.mrsu.ru ISSN Print 0236-2910
ISSN Online 2313-0636

УДК 532.133 DOI: 10.15507/0236-2910.028.201802.164-174

Поперечные колебательные движения в вязкой жидкости, контактирующей с пористой средой

Э. Н. Егерева[1], **А. Ю. Егерев**[2], **А. О. Зубов**[3*]
[1]*ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия)*
[2]*ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”» (г. Москва, Россия)*
[3]*ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет»*
[*]*finist94@yandex.ru*

Введение. Рассматривается решение двух задач о поперечных колебаниях в вязкой несжимаемой однородной жидкости, контактирующей с пористой средой (матрицей), насыщенной этой же жидкостью. Поверхностью раздела пористой среды и контактирующей с ней жидкости во всех рассмотренных случаях является плоскость.
Материалы и методы. Для описания движения жидкости в пористой среде использовалось нестационарное уравнение Бринкмана. В граничных условиях учитывалось возможное скольжение жидкости в пористой среде вдоль твердой непроницаемой поверхности, ограничивающей пористую среду.
Результаты исследования. Получены точные аналитические решения двух задач о внутренних поперечных волнах в вязкой жидкости, находящейся на слое пористой среды. Решение первой задачи показывает, что в вязкой жидкости могут существовать затухающие поперечные волны, скорость которых перпендикулярна направлению волны. В пористой среде амплитуда скорости монотонно уменьшается по мере удаления вглубь пористой среды. В тех случаях, когда поперечные волны существуют, их длина в пористой среде и свободной жидкости равна $2\pi\delta_2\sqrt{\Gamma}$ и $2\pi\delta_2$ соответственно. Сильное затухание волны происходит на расстоянии, приближенном к ее длине, поэтому движение сосредоточено в слое аналогичной толщины. Чтобы волна могла проникнуть из свободной жидкости в пористую среду, толщина слоев h_1 и h_2 должна быть сравнимой с длинами волн. Во второй задаче получено, что в случае $\varepsilon^2 << 1$ затухающие поперечные волны могут существовать только в свободной жидкости, а в случае $\varepsilon^2 >> 1$ – как в жидкости, так и в пористой среде.
Обсуждение и заключения. Таким образом, при малых частотах колебаний затухающие поперечные волны могут существовать только в свободной жидкости, а при больших – и в жидкости, и в пористой среде. Для дальнейшего исследования можно рассмотреть колебательные движения пористого шара с твердым непроницаемым ядром в вязкой жидкости.

Ключевые слова: пористая среда, вязкая жидкость, поперечные колебания, внутренние поперечные волны, уравнение Бринкмана, точное аналитическое решение

Для цитирования: Егерева Э. Н., Егерев А. Ю., Зубов А. О. Поперечные колебательные движения в вязкой жидкости, контактирующей с пористой средой // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28, № 2. С. 164–174. DOI: 10.15507/0236-2910.028.201802.164-174

Transverse Oscillatory Motion in Viscous Fluid in Contact with Porous Medium

E. N. Egereva[1], A. Yu. Egerev[2], A. O. Zubov[3*]
[1]National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)
[2]National Research University Higher School of Economics (Moscow, Russia)
[3]Moscow State University of Civil Engineering (Moscow, Russia)
[*]finist94@yandex.ru

Introduction. We consider the solution of two problems on transverse oscillations in a viscous incompressible homogeneous fluid in contact with a porous medium (matrix) saturated with the same liquid. The surface of the section of the porous medium and the liquid in contact with it is the plane in all the cases considered.
Materials and Methods. To describe the motion of a liquid in a porous medium, the non-stationary Brinkman equation is used. In the boundary conditions, the possible slip of a liquid in a porous medium along a solid impermeable surface, which limits the porous medium, is taken into account.
Results. Exact analytical solutions of two problems on internal transverse waves in a viscous fluid located on a layer of a porous medium are obtained. The first problem shows that damped transverse waves exist in a viscous fluid. The velocity of the wave is perpendicular to its direction. The amplitude of the velocity decreases monotonically as it moves deeper into the porous medium. Damped transverse waves can exist both in a free liquid and in a porous medium. The amplitude of these waves attenuates with distance from the oscillating plane into the interior of the liquid. In those cases where the transverse waves exist, their length in regions 1 and 2 is equal to $2\pi\delta_2\sqrt{\Gamma}$ and $2\pi\delta_2$, respectively. The strong attenuation of the wave occurs at a distance of the order of its length. Therefore, the motion is concentrated in a layer of thickness on the order of the wavelength. That the wave could penetrate from the free liquid into the porous medium of the thickness of the layers h_1 and h_2 should be comparable with the wave lengths. In the second problem, it is obtained that in the case of $\varepsilon^2 << 1$ damped transverse waves exist only in a free liquid, and in the case of $\varepsilon^2 >> 1$ damped transverse waves exist in both a liquid and a porous medium.
Conclusions. For the case of low frequencies, damped transverse waves can exist only in a free liquid, and in the case of high oscillation frequencies, both in a liquid and in a porous medium. The lengths of these waves in regions 1 and 2 are the same as in the first problem. Vibrational motion of a porous sphere with a solid impermeable core in a viscous fluid could be usefully explored in further research.

Keywords: porous medium, viscous fluid, transverse oscillatory, inner transverse waves, Brinkman equation, exact analytical solutions

For citation: Egereva E. N., Egerev A. Yu., Zubov A. O. Transverse Oscillatory Motion in Viscous Fluid in Contact with Porous Medium. *Vestnik Mordovskogo universiteta* = Mordovia University Bulletin. 2018; 28(2):164–174. DOI: 10.15507/0236-2910.028.201802.164-174

Введение

В статье рассматривается решение двух задач о поперечных колебаниях в вязкой несжимаемой однородной жидкости, контактирующей с пористой средой (матрицей), насыщенной этой же жидкостью. Поверхностью раздела пористой среды и контактирующей с ней жидкостью во всех рассмотренных случаях является плоскость. Очевидно, что колебательные движения жидкости могут проникать на заметную глубину в пористую матрицу только при достаточно большой пористости (близкой к единице) и высокой проницаемости пористой матрицы. Пористая среда далее предполагается недеформируемой, однородной и изотропной.

Новизна данного исследования заключается в том, что поперечные колебательные движения жидкости рассматриваются с учетом пористого основания, на котором она располагается и которое ограничено снизу твердой непроницаемой стенкой. Работа носит теоретический характер, однако результаты исследования могут быть применены в области ракетно-космической, авиационной и транспортной техники, а также при моделировании биосистем, где важна гидроупругость.

Обзор литературы

Распространение поверхностных волн в слое жидкости, находящейся на пористом основании, рассмотрено, в частности, в работах [1–2]. Наряду с поверхностными волнами в вязкой жидкости могут существовать также внутренние поперечные волны, вызванные колебаниями погруженных в нее твердых тел. Решение задачи о поперечных колебательных движениях в жидкости, соприкасающейся с неограниченной плоской поверхностью, которая колеблется в своей плоскости, приведено в работах[1–2].

В статье [3] представлены результаты качественного и количественного анализа аналитических решений краевой задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости под действием постоянного градиента давления в длинной плоской щели и цилиндрическом канале, заполненных пористым материалом.

В работе [4] исследована математическая модель распространения и неустойчивости волн на поверхности цилиндрического столба магнитной жидкости бесконечной длины, окружающей коаксиально расположенное длинное пористое ядро круглого сечения. Найдены условия, при которых возмущения поверхности жидкого столба становятся неустойчивыми и приводят к его распаду на цепочку соединенных капель. Показано, что длина этих капель увеличивается с возрастанием магнитного поля.

Численное решение модели Бринкмана с учетом неравномерной пористости вблизи стенки канала, заполненного зернистой средой, получено в статье [5]. Данное решение позволяет более детально исследовать поведение потока жидкости вблизи стенки в зернистых средах. Сравнение моделей пористой среды Дарси и Бринкмана приведено в работе [6], где рассмотрено математическое моделирование нестационарных режимов термогравитационной конвекции в пористой вертикальной цилиндрической полости с теплопроводной оболочкой конечной толщины в условиях конвективного охлаждения со стороны окружающей среды.

Решение задачи о течении вязкой жидкости в плоском канале, который заполнен волокнистой пористой средой, представленной регулярной системой цилиндров, расположенных поперек потока жидкости, представлено в работах[3] [7].

В работе [8] рассмотрено условие передачи импульса, которое применяется на границе между пористой средой и однородной жидкостью. При этом используются закон Дарси с поправкой Бринкмана и уравнения Стокса. Данный подход вызывает скачок напряжения, что имеет важное значение для процессов теплообмена, поскольку допускает непрерывный конвективный перенос на границе между пористой средой и однородной жидкостью.

В работе [9] приведены точные аналитические решения задач об обтекании сферы и цилиндра в пористой среде при использовании уравнения Бринкмана с граничным условием На-

[1] **Ламб Г.** Гидродинамика. М. : ОГИЗ, 1947. 929 с. URL: https://www.twirpx.com/file/63848

[2] **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика: в 10 т. М. : Физматлит, 2015. 736 с. Т. 6: Гидродинамика. URL: http://www.immsp.kiev.ua/postgraduate/Biblioteka_trudy/GidrodinamikaLanday1986.pdf

[3] **Маскет М.** Течение однородных жидкостей в пористой среде. М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. С. 640–641. URL: http://www.geokniga.org/books/4843

вье. Показано, что условие прилипания на границе пористой среды и твердого тела, в частности, при использовании уравнения Бринкмана, в общем случае должно быть заменено на условие, допускающее ненулевую скорость фильтрации на границе.

Материалы и методы

Первая задача

Рассматриваются поперечные колебательные движения жидкости с учетом пористого основания. Предполагается, что неподвижный слой пористой среды толщиной h_1 снизу ограничен неподвижной непроницаемой плоской поверхностью, а сверху контактирует со слоем свободной жидкости толщиной h_2. Жидкость соприкасается сверху с неограниченной плоской поверхностью, колеблющейся вдоль своей плоскости по гармоническому закону с частотой ω.

Система координат выбрана так, что поверхность раздела пористой среды и жидкости совпадает с плоскостью y, z; пористая среда занимает область $h_1 \le x \le 0$, а жидкости соответствует $0 \le x \le h_2$. Ось y выбирается параллельно направлению колебаний плоской поверхности $x = h_2$, скорость которой запишем в виде функции от времени $u = u_0 \, exp(-i\omega t)$, где u_0 – действительная постоянная. Все величины не зависят от z. Величины, относящиеся к пористой среде и свободной жидкости, обозначаются в необходимых случаях индексами 1 и 2 соответственно.

Для решения первой задачи запишем систему уравнений нестационарного движения жидкости в пористой среде – модель фильтрации Бринкмана [10]:

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} + \frac{\rho}{\Gamma^2}(\boldsymbol{u}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_1 = -\nabla p_1 + \eta' \nabla^2 \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{f}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0, \qquad (1)$$

где ρ – плотность жидкости ($\rho = const$); Γ – пористость матрицы ($\Gamma = const$); $\boldsymbol{u}_1$ – макроскопическая скорость фильтрации ($\boldsymbol{u}_1 = \Gamma \boldsymbol{v}_1$, где $\boldsymbol{v}_1$ – средняя по объему пор скорость жидкости); p_1 – среднее по объему пор давление; $\boldsymbol{f} = -(\eta / K)\boldsymbol{u}_1$ – плотность силы сопротивления пористой матрицы; K – коэффициент проницаемости пористой матрицы ($K = const$) η' – эффективная вязкость жидкости в порах; η – вязкость свободной жидкости ($\eta' = \eta$).

Очевидно, колебательное движение жидкости в пористой среде возможно только при достаточно большой пористости, близкой к единице. Поэтому далее предполагаем, что пористость близка к единице, и с учетом этого принимаем $\eta' = \eta$ [11].

Уравнения движения свободной жидкости имеют вид[4] [4]

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u}_2 \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_2 = -\nabla p_2 + \eta \nabla^2 \boldsymbol{u}_2,$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0. \qquad (2)$$

Из соображений симметрии следует, что все величины будут функциями только от координаты x и времени t. Согласно уравнениям непрерывности, в (1–2) $u_{1y} \equiv u_1, u_{2y} \equiv u_2$, а также $u_{1x} = const, u_{2x} = const$, где обе константы должны быть равны нулю, поскольку с учетом уравнений непрерывности граничных условий $u_{1x} = 0$ и $u_{2x} = 0$ на непроницаемых поверхностях $x = -h_1$ и $x = h_2$. Поэтому $u_{1x} \equiv 0$, $u_{2x} \equiv 0$. Кроме того, $(\boldsymbol{u}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_1 \equiv 0$ и $(\boldsymbol{u}_2 \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_2 \equiv 0$. Таким образом, вследствие симметрии уравнения движения (1–2) линеаризуются.

Вторая задача

Отличие постановки данной задачи от первой заключается в том, что на свободной поверхности жидкости $x = h_2$ действует касательное напряжение, измеряющееся по гармоническому закону $\sigma_{xy} = \eta S_0 \exp(-i\omega t)$.

Такое напряжение может быть создано, например, потоком воздуха переменного направления или касательным к поверхности переменным

[4] **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика: в 10 т. Т. 6: Гидродинамика. М. : Физматлит, 2015. 736 с. URL: http://www.immsp.kiev.ua/postgraduate/Biblioteka_trudy/GidrodinamikaLanday1986.pdf

электрическим полем, действующим на поверхностный заряд в электропроводной жидкости.

Результаты исследования

Уравнения движения для первой задачи принимают вид:

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p_1 + \upsilon\nabla^2 \boldsymbol{u}_1 - \frac{\upsilon}{K}\boldsymbol{u}_1,$$
$$div\, \boldsymbol{u}_1 = 0,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p_2 + \upsilon\nabla^2 \boldsymbol{u}_2, \qquad (3)$$

где $\upsilon' = \frac{\eta'}{\rho}$; $\upsilon = \frac{\eta}{\rho}$.

Из (3) найдем $p_1 \equiv const$, $p_2 \equiv const$. Из симметрии следует, что скорости $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ направлены вдоль оси y.

Введем обозначения $u_{1y} \equiv u_1$, $u_{2y} \equiv u_2$, получим:

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial t} = \upsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\upsilon}{K}u_1,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \upsilon\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}. \qquad (4)$$

Граничные условия к уравнениям (4) запишем в виде[5] [8; 12]:

$$u_1 = \beta\frac{\partial u_1}{\partial x}\ (x = -h_1)\ (\beta = const),$$
$$u_1 = u_2\ (x = 0),$$
$$\Lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\right) = u_2\ (x = 0)\ (\Lambda = const),$$
$$u_2 = u_0 \exp(-i\omega t)\ (x = h_2), \qquad (5)$$

где β и Λ – постоянные с размерностью длины.

В первом условии (5) учитывается возможное скольжение жидкости относительно твердой непроницаемой поверхности, контактирующей с пористой средой. При $\beta = 0$ получается обычное условие прилипания $u_1 = 0$. В модели фильтрации Дарси (более простой по сравнению с моделью Бринкмана) наличие скольжения неявно учитывается тем, что на скорость жидкости накладывается только условие непротекания в нормальном к твердой поверхности направлении, а скорость скольжения жидкости вдоль этой поверхности остается неопределенной. Второе условие (5) выражает непрерывность скорости. Третье связывает скачок касательных напряжений с относительной касательной скоростью жидкости на поверхности раздела; при $1/\Lambda \to 0$ оно переходит в условие непрерывности касательных напряжений, а при $\Lambda = 0$ – в условие прилипания. Четвертое – это обычное условие прилипания жидкости к твердой поверхности.

Найдем решения уравнений (4) с учетом граничных условий:

$$u_1(x,t) = F_1(x)\exp(-i\omega t),$$
$$u_2(x,t) = F_2(x)\exp(-i\omega t). \qquad (6)$$

Подставив (6) в (4), получим:

$$F_1''(x) + \left(\frac{i\omega}{\upsilon\Gamma} - \frac{1}{K}\right)F_1(x) = 0,$$
$$F_2''(x) + \frac{i\omega}{\upsilon}F_2(x) = 0. \qquad (7)$$

Найдем решение системы данных дифференциальных уравнений с учетом четырех граничных условий для функций F_1 и F_2, вытекающих из условий (5):

$$F_1(x) = A_1 \exp\xi_1 x + B_1 \exp(-\xi_1 x),$$
$$F_2(x) = A_2 \exp\xi_2 x + B_2 \exp(-\xi_2 x), \qquad (8)$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 – произвольные постоянные,

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{i\delta}{\delta_2^2}\right),\ \xi_2 = \frac{1-i}{\delta_2},$$
$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\delta_1^2} + \sqrt{\frac{1}{\delta_1^4} + \frac{1}{\delta_2^4}},$$

[5] **Ламб Г.** Гидродинамика. М. : ОГИЗ, 1947. 929 с. URL: https://www.twirpx.com/file/63848

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2K}{\Gamma}},\ \delta_2 = \sqrt{\frac{2\upsilon}{\omega}}.$$

Подставим выражения $F_1(x)$, $F_2(x)$ (8) в граничные условия (5), запишем систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, B_1, A_2, B_2:

$$A_1(1-\beta\xi_1)\exp(-\xi_1 h_1) +$$
$$+B_1(1+\beta\xi_1)\exp(\xi_1 h_1) = 0$$

при $x = -h_1$

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \text{ при } x = 0;$$

$$A_1\left(\xi_1 - \frac{1}{\Lambda}\right) - B_1\left(\xi_1 + \frac{1}{\Lambda}\right) - (A_2 - B_2)\xi_2 = 0$$

при $x = 0$;

$$A_2\exp(\xi_2 h_2) + B_2\exp(-\xi_2 h_2) = u_0$$

при $x = h_2$.

Найдем постоянные A_1, B_1, A_2, B_2:

$$A_1 = \frac{u_0}{2}\left(\frac{1}{D_1} - \frac{D}{D_1}\mathrm{sh}\xi_2 h_2\right)(1+\beta\xi_1)\cdot$$
$$\cdot\exp(\xi_1 h_1 + \xi_2 h_2),$$

$$B_1 = \frac{u_0}{2}\left(\frac{D}{D_1}\mathrm{sh}\xi_2 h_2 - \frac{1}{D_1}\right)(1-\beta\xi_1)\cdot$$
$$\cdot\exp(\xi_2 h_2 - \xi_1 h_1),$$

$$A_2 = \frac{1}{2}u_0 D,$$

$$B_2 = u_0\left(\exp\xi_2 h_2 - \frac{1}{2}D\exp 2\xi_2 h_2\right),$$

$$D = \frac{D_1\xi_2 + D_2}{D_1\xi_2\mathrm{ch}\xi_2 h_2 + D_2\mathrm{sh}\xi_2 h_2},$$

$$D_1 = \mathrm{sh}\xi_1 h_1 + \beta\xi_1\mathrm{ch}\xi_1 h_1,$$

$$D_2 = \xi_1\left(1 - \frac{\beta}{\Lambda}\right)\mathrm{ch}\xi_1 h_1 + \left(\beta\xi_1^2 - \frac{1}{\Lambda}\right)\mathrm{sh}\xi_1 h_1$$

В частном случае $\beta = 0$, $\Lambda\to\infty$ коэффициенты A_1, B_1, A_2, B_2 значительно упрощаются.

В пределе $\Gamma\to 1$, $K\to\infty$ насыщенная жидкостью пористая среда заменяется свободной жидкостью. При этом система двух уравнений (7) заменяется одним вторым уравнением с граничными условиями: $u_1(-h_1) = 0$ и 4 в (5). Решение такой задачи представлено в работе Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица[6]. В предельном случае $h_1\to 0$ остается только уравнение для $F_2(x)$ и граничное условие 4 в (5). Второе граничное условие примет вид $u_2(0,t) = 0$; условия 1 и 3 отбрасываются. В результате получим выражение для скорости, совпада ющее с тем, что было получено Ландау и Лифшицем:

$$u_2(x,t) = \frac{\sin k_2 x}{\sin k_2 h_2}u_0\exp(-i\omega t).$$

Здесь и далее $k_2 = (1+i)/\delta_2$. Везде подразумеваются действительные части соответствующих комплексных выражений.

В связи с громоздкостью общего решения (8) рассмотрим подробнее два предельных случаях:

1) $\varepsilon^2 = (\delta_1/\delta_2)^2 = \omega K/(\upsilon\Gamma) << 1$,
2) $\varepsilon^2 >> 1$.

В первом предельном случае $\varepsilon^2 << 1$ выражения для скоростей принимают следующий вид:

$$\frac{u_1}{u_0} = H'\left(\mathrm{sh}\frac{h_1 + x}{\delta_1^*} + \frac{\beta}{\delta_1^*}\mathrm{ch}\frac{h_1 + x}{\delta_1^*}\right)\cdot$$
$$\cdot\exp(-ik_2 h_2 - i\omega t),$$

$$\frac{u_2}{u_0} = \left[D'\sin k_2(h_2 - x) + e^{ik_2 x}\right]\cdot$$
$$\cdot\exp(-ik_2 h_2 - i\omega t)$$

$$H' = (1 + D'\sin k_2 h_2)/D_1',$$

[6] Там же.

$$D' = \frac{ik_2 D_1' - D_2'}{k_2 D_1' cos k_2 h_2 + D_2' sin k_2 h_2},$$

$$D_1' = \mathrm{sh}\frac{h_1}{\delta_1^*} + \frac{\beta}{\delta_1^*}\mathrm{ch}\frac{h_1}{\delta_1^*},$$

$$D_2' = \frac{1}{\delta_1^*}\left(1 - \frac{\beta}{\Lambda}\right)\mathrm{ch}\frac{h_1}{\delta_1^*} +$$

$$+\frac{1}{\delta_1^*}\left(\frac{\beta}{\delta_1^*} - \frac{\delta_1^*}{\Lambda}\right)\mathrm{sh}\frac{h_1}{\delta_1^*}. \quad (9)$$

Здесь и далее $\delta_1^* = \delta_1\sqrt{\Gamma/2}$.

Силу трения, действующую на единицу площади колеблющейся пластины, определим по формуле:

$$P_y = -\eta\frac{\partial u_2}{\partial x} \text{ при } x = h_2.$$

В данном случае эта сила трения равна

$$P_y(h_2) = -\eta\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=h_2} =$$

$$= -\eta u_0 k_2 (i - D' e^{-ik_2h_2}) \cdot e^{-i\omega t}, \quad (10)$$

а на поверхности пористой матрицы ($x = 0$):

$$P_y(0) = \eta\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = \eta u_0 k_2 (i - D' cos k_2 h_2) \cdot$$

$$\cdot \exp(-ik_2h_2 - i\omega t). \quad (11)$$

Для второго предельного случая $\varepsilon^2 >> 1$ запишем:

$$\frac{u_1}{u_0} = H''\left[\sin\frac{k_2(h_1 + x)}{\sqrt{\Gamma}} + \frac{\beta k_2}{\sqrt{\Gamma}}\cos\frac{k_2(h_1 + x)}{\sqrt{\Gamma}}\right] \cdot$$

$$\cdot \exp(-ik_2h_2 - i\omega t),$$

$$\frac{u_2}{u_0} = \left[D'' sin k_2(h_2 - x) + e^{ik_2x}\right] \cdot$$

$$\cdot \exp(-ik_2h_2 - i\omega t),$$

$$H'' = (1 + D'' sin k_2 h_2)/D_1'',$$

$$D'' = \frac{ik_2 D_1'' - D_2''}{k_2 D_1'' cos k_2 h_2 + D_2'' sin k_2 h_2},$$

$$D_1'' = \sin\frac{k_2 h_1}{\sqrt{\Gamma}} + \frac{\beta k_2}{\sqrt{\Gamma}}\cos\frac{k_2 h_1}{\sqrt{\Gamma}},$$

$$D_2'' = \frac{k_2}{\sqrt{\Gamma}}\left(1 - \frac{\beta}{\Lambda}\right)\cos\frac{k_2 h_1}{\sqrt{\Gamma}} -$$

$$-\left(\frac{\beta k_2^2}{\Gamma} + \frac{1}{\Lambda}\right)\sin\frac{k_2 h_1}{\sqrt{\Gamma}}. \quad (12)$$

Силы трения на поверхностях $x = h_2$ и $x = 0$ вычисляются в данном случае из формул (10–11) соответственно путем замены в них D' на D''.

При $\beta \to 0$, $\Lambda \to 0$, $h_1 \to 0$ выражения (10–11) в обоих предельных случаях принимают известный вид[7]:

$$P_y(h_2) = -k_2\eta u_0 \mathrm{ctg} k_2 h_2 \exp(-i\omega t),$$

$$P_y(0) = \frac{k_2\eta u_0}{sin k_2 h_2}\exp(-i\omega t).$$

Согласно (9; 12) скорость u_2 в первом предельном случае, а также u_1 и u_2 во втором выражаются через тригонометрические функции от аргумента x (а также от времени t) и экспоненциальные множители перед ними. Следовательно, в вязкой жидкости (область 2) в первом случае могут существовать затухающие поперечные волны, в которых скорость $u_2 = u_{2y}$ перпендикулярна направлению волны (оси x). В пористой среде (область 1) такие волны в этом случае отсутствуют: амплитуда скорости u_1 монотонно убывает по мере удаления от поверхности $x = 0$ вглубь пористой среды.

Во втором предельном случае затухающие поперечные волны могут существовать как в свободной жидкости, так и в пористой среде. Амплитуда этих волн затухает по мере удаления от колеблющейся плоскости вглубь жидкости.

[7] Там же.

В тех случаях, когда поперечные волны существуют, их длина в областях 1 и 2 равна $2\pi\delta_2\sqrt{\Gamma}$ и $2\pi\delta_2$ соответственно. Сильное затухание волны происходит на расстоянии, близком к ее длине, поэтому движение сосредоточено в слое аналогичной толщины. Чтобы волна могла проникнуть из свободной жидкости в пористую среду, толщина слоев h_1 и h_2 должна быть сравнимой с длинами волн.

Во второй задаче вместо условия 4 в (5) запишем:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = S_0 \exp(-i\omega t) \ \ (x = h_2),$$

при этом условия 1–3 не изменяются.

В этом случае решения уравнений (7) имеют вид (8), но с другими коэффициентами: A_1, B_1, A_2, B_2. Найдем эти коэффициенты из математических граничных условий данной задачи в общем виде:

$$A_1(1-\beta\xi_1)\exp(-\xi_1 h_1) +$$
$$+B_1(1+\beta\xi_1)\exp(\xi_1 h_1) = 0 \ \ (x = -h_1)$$
$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \ (x = 0),$$
$$A_1\left(\xi_1 - \frac{1}{\Lambda}\right) - B_1\left(\xi_1 + \frac{1}{\Lambda}\right) - (A_2 - B_2)\xi_2 = 0$$
$$(x = 0),$$
$$\xi_2 A_2 \exp(\xi_2 h_2) - \xi_2 B_2 \exp(-\xi_2 h_2) = S_0$$
$$(x = h_2).$$

Из четырех данных уравнений найдем неизвестные A_1, B_1, A_2, B_2 в общем виде:

$$A_1 = \frac{S_0(1+\beta\xi_1)}{2D_1}\left(D\,\mathrm{ch}\,\xi_2 h_2 - \frac{1}{\xi_2}\right)\cdot$$
$$\cdot\exp(\xi_1 h_1 + \xi_2 h_2),$$

$$B_1 = \frac{S_0(1+\beta\xi_1)}{2D_1}\left(\frac{1}{\xi_2} - D\,\mathrm{ch}\,\xi_2 h_2\right)\cdot$$
$$\cdot\exp(\xi_2 h_2 + \xi_1 h_1),$$

$$A_2 = \frac{1}{2}S_0 D,$$

$$B_2 = S_0\left(\frac{1}{2}D\cdot\exp 2\xi_2 h_2 - \frac{\exp\xi_2 h_2}{\xi_2}\right),$$

$$D = \frac{D_1\xi_2 + D_2}{D_1\xi_2^2\,\mathrm{sh}\,\xi_2 h_2 + D_2\xi_2\,\mathrm{ch}\,\xi_2 h_2},$$

$$D_1 = \mathrm{sh}\,\xi_1 h_1 + \beta\xi_1\,\mathrm{ch}\,\xi_1 h_1,$$

$$D_2 = \xi_1\left(1 - \frac{\beta}{\Lambda}\right)\mathrm{ch}\,\xi_1 h_1 + \left(\beta\xi_1^2 - \frac{1}{\Lambda}\right)\mathrm{sh}\,\xi_1 h_1.$$

В связи с громоздкостью получаемого выражения для скорости колебания жидкости рассмотрим два предельных случая найденного общего решения.

В случае малых частот колебаний волн $\varepsilon^2 \ll 1$ выражения для скоростей принимают вид:

$$u_1 = H'\left(\mathrm{sh}\frac{h_1 + x}{\delta_1^*} + \frac{\beta}{\delta_1^*}\mathrm{ch}\frac{h_1 + x}{\delta_1^*}\right)\cdot$$
$$\cdot\exp(-ik_2 h_2 - i\omega t),$$

$$u_2 = S_0 D'\left[\frac{1}{2}e^{-ik_2 x} + \left(\frac{1}{2}e^{-ik_2 h_2} + \frac{1}{ik_2 D'}\right)e^{ik_2(x-h_2)}\right]\cdot$$
$$\cdot\exp(-i\omega t),$$

$$H' = \frac{S_0}{D_1'}\left(\frac{1}{ik_2} + D' cos\, k_2 h_2\right),$$

$$D' = \frac{k_2 D_1' + iD_2'}{k_2 D_2' cos\, k_2 h_2 - k_2^2 D_1' sin\, k_2 h_2},$$

$$D_1' = \mathrm{sh}\frac{h_1}{\delta_1^*} + \frac{\beta}{\delta_1^*}\mathrm{ch}\frac{h_1}{\delta_1^*},$$

$$D_2' = \frac{1}{\delta_1^*}\left(1 - \frac{\beta}{\Lambda}\right)\mathrm{ch}\frac{h_1}{\delta_1^*} +$$
$$+\frac{1}{\delta_1^*}\left(\frac{\beta}{\delta_1^*} - \frac{\delta_1^*}{\Lambda}\right)\mathrm{sh}\frac{h_1}{\delta_1^*}. \qquad (13)$$

Для больших частот колебаний волн $\varepsilon^2 \gg 1$ запишем:

$$u_1 = H''\left[\sin\frac{k_2(h_1+x)}{\sqrt{\Gamma}} + \frac{\beta k_2}{\sqrt{\Gamma}}\cos\frac{k_2(h_1+x)}{\sqrt{\Gamma}}\right]\cdot$$
$$\cdot\exp(-ik_2h_2 - i\omega t),$$

$$u_2 = S_0 D''\left[\frac{1}{2}e^{-ik_2x} + \left(\frac{1}{2}e^{-ik_2h_2} + \frac{1}{ik_2D''}\right)e^{ik_2(x-h_2)}\right]\cdot$$
$$\cdot\exp(-i\omega t),$$

$$H'' = \frac{S_0}{D_1''}\left(\frac{1}{ik_2} + D''\cos k_2h_2\right),$$

$$D'' = \frac{k_2D_1'' + iD_2''}{k_2D_2''\cos k_2h_2 - k_2^2D_1''\sin k_2h_2},$$

$$D_1'' = \sin\frac{k_2h_1}{\sqrt{\Gamma}} + \frac{\beta k_2}{\sqrt{\Gamma}}\cos\frac{k_2h_1}{\sqrt{\Gamma}},$$

$$D_2'' = \frac{k_2}{\sqrt{\Gamma}}\left(1 - \frac{\beta}{\Lambda}\right)\cos\frac{k_2h_1}{\sqrt{\Gamma}} -$$
$$-\left(\frac{\beta k_2^2}{\Gamma} + \frac{1}{\Lambda}\right)\sin\frac{k_2h_1}{\sqrt{\Gamma}}. \qquad (14)$$

Из (13–14) следует, что в первом предельном случае затухающие поперечные волны могут существовать только в свободной жидкости, а во втором – и в жидкости, и в пористой среде. Длины этих волн в областях 1 и 2 аналогичны записанным в первой задаче.

Скорость жидкости на свободной поверхности равна в первом случае

$$u_2\Big|_{x=h_2} = S_0D'\left[\exp(-ik_2h_2) + 1/ik_2D\right]\cdot$$
$$\cdot\exp(-i\omega t), \qquad (15)$$

а во втором вычисляется из (13) путем замены D' на D''.

В пределе $\beta \to 0, \Lambda \to 0, h_1 \to 0$ (при замене пористой матрицы непроницаемой поверхностью $x = 0$) выражение (15) принимает вид:

$$u_2 = (S_0 / k_2)\cdot e^{-i\omega t}\mathrm{tg}k_2h_2.$$

Обсуждение и заключения

В статье получены точные аналитические решения уравнения Бринкмана для двух задач о внутренних поперечных волнах в вязкой жидкости, находящейся на пористом основании. На границе пористой среды и твердого тела учитывается возможное скольжение жидкости.

Данные исследования направлены на изучение свойств гидроупругости в сферах ракетно-космической, авиационной и транспортной техники, а также для моделирования биологических систем.

В рамках будущих исследований можно рассмотреть колебательные движения пористого шара с твердым непроницаемым ядром в вязкой жидкости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Слезкин Н. А.** О влиянии пористости дна на плоскую стоячую волну в тяжелой жидкости // Известия АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 160–163.

2. **Столяров И. В., Тактаров Н. Г.** Распространение поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании // Известия АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 183–186.

3. **Ханукаева Д. Ю., Филиппов А. Н.** Фильтрация вязкой жидкости через среду Бринкмана, ограниченную непроницаемыми стенками // Труды РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина. 2014. Т. 276, № 3. С. 145–155. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=22742022

4. **Егерева Э. Н., Рунова О. А., Тактаров Н. Г.** Неустойчивость и распад столба магнитной жидкости, окружающей длинное пористое ядро // Известия РАН. 2015. № 1. С. 153–162. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=23284009

5. **Бочкарев А. А., Волков В. И.** Модель Бринкмана с учетом неравномерной пористости // Известия Алтайского государственного университета. 2002. С. 99–100. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=20407818

6. **Трифонова Т. А., Шеремет М. А.** Сравнительный анализ моделей Дарси и Бринкмана при исследовании нестационарных режимов сопряженной естественной конвекции в пористой цилиндрической области // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5, № 4. С. 623–634. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=21160592

7. **Мосина Е. В.** Численное исследование течения на границе жидкость – пористая среда // Теоретические основы химической технологии. 2010. Т. 44, № 5. С. 536–542. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=15249478

8. **Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S.** Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 1995. Vol. 38. P. 2635–2646. DOI: https://doi.org/10.1016/0017-9310(94)00346-W

9. **Леонтьев Н. Е.** Течения в пористой среде вокруг цилиндра и сферы в рамках уравнения Бринкмана с граничным условием Навье // Известия РАН. 2014. № 2. С. 107–112. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=21472629

10. **Brinkman H. C.** A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Sci. Res. 1947. Vol. 1, no. 1. P. 27–34. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02120313

11. **Haber S., Mauri R.** Boundary conditions for Darcy's flow through porous media // Int. J. Multiphase Flow. 1983. Vol. 9, no. 5. P. 561–574. DOI: https://doi.org/10.1016/0301-9322(83)90018-6

12. **Harris S. D., Ingham D. B., Pop I.** Mixed convection boundary-layer flow near the stagnation point on a vertical surface in a porous medium: Brinkman model with slip // Transp. Porous Med. 2009. Vol. 77, no. 2. P. 267–285. DOI: https://doi.org/10.1007/s10485-011-1526-x

Поступила 24.11.2017; принята к публикации 24.04.2018; опубликована онлайн 29.06.2018

Об авторах:

Егерева Эльвира Николаевна, доцент кафедры прикладной математики, диффереciальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ResearcherID: F-9071-2018, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5474-924X, egerevaen@mail.ru

Егерев Артем Юрьевич, бакалавр, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (101000, Россия, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20), ResearcherID: F-8420-2018, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6928-3764, ayegerev@yandex.ru

Зубов Александр Олегович, магистрант, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 26), ResearcherID: F-7655-2018, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4909-228X, finist94@yandex.ru

Заявленный вклад соавторов:

Е. Н. Егерева – анализ теоретического материала, анализ полученных результатов, написание первоначального варианта статьи; А. Ю. Егерев – обработка числовых данных и доработка текста; А. О. Зубов – вычитка текста статьи, анализ научных источников.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

REFERENCES

1. Slezkin N. A. [On the influence of the porosity of the bottom on a flat standing wave in a heavy fluid]. *Izvestiya AN SSSR. MZhG* = USSR Academy of Sciences Bulletin. Mechanics of Liquid and Gas. 1984; 4:160–163. (In Russ.)

2. Stolyarov I. V., Taktarov N. G. [Propagation of surface waves in a layer of fluid on a porous base]. *Izvestiya AN SSSR. MZhG* = USSR Academy of Sciences Bulletin. Mechanics of Liquid and Gas. 1987; 5:183–186. (In Russ.)

3. Hanukaeva D. Yu., Filippov A. N. Filtration of viscous fluid through Brinkman media limited by impermeable walls. *Trudy RGU nefti i gaza imeni I. M. Gubkina* = Works of Gubkin Russian State University of Oil and Gas. 2014; 276(3):145–155. Available at: http://elibrary.ru/item.asp?id=22742022 (In Russ.)

4. Egereva E. N., Runova O. A., Taktarov N. G. Instability and disintegration of a magnetic fluid column that surrounds a long porous core. Fluid Dynamics. 2015; 50(1):164–172. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=24010576

5. Bochkarev A. A., Volkov V. I. Model of the Brinkman with the account of non-uniform the porosity. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta* = Altay State University Bulletin. 2002; 1:99–100. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=20407818 (In Russ.)

6. Trifonova T. A., Sheremet M. A. Comparative analysis of Darcy and Brinkman models at studying of transient conjugate natural convection in a porous cylindrical cavity. *Kompyuternyye issledovaniya i modelirovaniye* = Computer Studies and Modeling. 2013; 5(4):623–634. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=21160592 (In Russ.)

7. Mosina E. V. Numerical study of flow at a liquid-porous medium interface. Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2010; 44(5):679–685. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=16670164

8. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 1995. Vol. 38. P. 2635–2646. DOI: https://doi.org/10.1016/0017-9310(94)00346-W

9. Leont'ev N. E. Flow past a cylinder and a sphere in a porous medium within the framework of the Brinkman equation with the Navier boundary condition. Fluid Dynamics. 2014; 49(2):232–237. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=21875223

10. Brinkman H. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. Appl. Sci. Res. 1947; 1(1):27–34. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02120313

11. Haber S., Mauri R. Boundary conditions for Darcy's flow through porous media. Int. J. Multiphase Flow. 1983; 9(5):561–574. DOI: https://doi.org/10.1016/0301-9322(83)90018-6

12. Harris S. D., Ingham D. B., Pop I. Mixed convection boundary-layer flow near the stagnation point on a vertical surface in a porous medium: Brinkman model with slip. Transp. Porous Med. 2009; 77(2):267–285. DOI: https://doi.org/10.1007/s10485-011-1526-x

Received 24.11.2017; revised 24.04.2018; published online 29.06.2018

About authors:

Elvira N. Egereva, Associate Professor, Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia) Ph.D. (Physics and Mathematics), ResearcherID: F-8420-2018, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5474-924X, egerevaen@mail.ru

Artem Yu. Egerev, Student, National Research University Higher School of Economics, (20 Myasnitskaya St., Moscow 101000, Russia), ResearcherID: F-8420-2018, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6928-3764, ayegerev@yandex.ru

Alexander O. Zubov, Master's Student, National Research University of Civil Engineering (26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow 129337, Russia), ResearcherID: F-7655-2018, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4909-228X, finist94@yandex.ru

Authors' contribution:

E. N. Egereva – collection and analysis of theoretical material, analysis of the results obtained, writing the draft; A. Yu. Egerev – numerical data processing of and revision of the text; A. O. Zubov – word processing, analysis of literature data.

All authors have read and approved the final version of the paper.