

## Обратные задачи оптимальной стабилизации со скалярным управлением

**В. В. Афонин\*, С. М. Мурюмин**

*ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия)*

*\*vvaфонin53@yandex.ru*

*Введение.* В работе рассматриваются обратные задачи оптимальной стабилизации при полном измерении вектора состояния объектов управления. Используя так называемые соотношения оптимальности, авторы предлагают алгоритм численного определения весовых матриц квадратичного функционала качества.

*Материалы и методы.* В качестве исходных данных используются математические модели линейных стационарных полностью управляемых объектов. Начальный этап решения связан с задачей модального управления с целью получения пропорционального регулятора (модального регулятора) для стабилизации объекта управления по расположению полюсов замкнутой системы. На следующем этапе исследования применялся метод оптимальной стабилизации по среднеквадратичному критерию. Основной процесс определения весовых матриц квадратичного функционала осуществлялся с помощью численных методов решения алгебраических уравнений и соотношений оптимальности.

*Результаты исследования.* На основе предложенного алгоритма определения весовых матриц квадратичного функционала были разработаны программы для исследования результатов стабилизации объектов управления со скалярным управлением до 20-го порядка. В частном случае рассматривалась задача с параметром весового коэффициента квадратичного функционала, позволяющим проектировщику систем управления принимать решение о целесообразности процесса стабилизации по вторичным показателям качества переходного процесса по выходу оптимальной системы.

*Обсуждение и заключения.* Результаты численного эксперимента показали, что предлагаемый метод стабилизации (на основе решения обратной задачи оптимальной стабилизации) позволяет избежать ограничений модального управления. Кроме того, для проектирования систем стабилизации предлагается использовать итерационный алгоритм с целью оценки качества переходных процессов в замкнутой системе управления.

**Ключевые слова:** соотношения оптимальности, среднеквадратичный функционал, модальное управление, оптимальная стабилизация, линейная стационарная система автоматического управления

**Для цитирования:** Афонин В. В., Мурюмин С. М. Обратные задачи оптимальной стабилизации со скалярным управлением // Вестник Мордовского университета. 2017. Т. 27, № 4. С. 504–517. DOI: 10.15507/0236-2910.027.201704.504-517



## Inverse Problems of Optimal Stabilization with Scalar Control

V. V. Afonin\*, S. M. Muryumin

National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

\*vvafoin53@yandex.ru

**Introduction.** The paper explores inverse problems of optimal stabilization with a full measurement of the control object state vector. Using the so-called optimality relations, the authors propose an algorithm for the numerical determination of the weight matrices of a quadratic quality functional.

**Materials and Methods.** As initial data, mathematical models of linear stationary fully controlled objects are used. The initial stage of the solution is connected with the task of modal control to obtain a proportional regulator – a modal controller – to stabilize the control object by arranging the poles of a closed system. The next approach is the optimal stabilization method by the root-mean-square criterion. At this stage, the basic process of determining the weight matrices of a quadratic functional is carried out using numerical methods for solving algebraic equations and optimality relations.

**Results.** Based on the proposed algorithm for determining the weight matrices of a quadratic functional, the programs were developed to study the results of stabilizing control objects with scalar control up to the 20th order. In a particular case, the problem was considered with the parameter of the quadratic functional weight coefficient that allows the control systems designer to make a decision about the expediency of the stabilization process by secondary indicators of the transient process quality for the optimal system output.

**Discussions and Conclusions.** The results of the numerical experiment showed that the proposed stabilization method, based on the solution of the inverse problem of optimal stabilization, avoids the limitations of modal control. In addition, for designing stabilization systems the authors propose using an iterative algorithm to assess the quality of transients in a closed control system.

**Keywords:** optimality relations, mean-square functional, modal control, optimal stabilization, linear stationary automatic control system

**For citation:** Afonin V. V., Muryumin S. M. Inverse Problems of Optimal Stabilization with Scalar Control. *Vestnik Mordovskogo universiteta* = Mordovia University Bulletin. 2017: 27(4):504–517. DOI: 10.15507/0236-2910.027.201704.504-517

### Введение

В данной статье авторы опирались на результаты, представленные в ранних работах [1–3], где приводятся различные соотношения оптимальности. Введенное название *соотношения оптимальности* относится к оптимальной задаче стабилизации с квадратичным функционалом качества и стационарной модели линейного объекта управления. Соотношения оптимальности связывают между собой весовые коэффициенты функционала качества ( $Q$ ,  $R$ ), матрицы ( $A$ ,  $B$ ) объекта управления и матрицу оптимального регулятора ( $K_r$ ). В задаче со скалярным управлением весовая матрица

$R$  становится положительным числом, а матрица оптимального регулятора – матрицей-строкой.

С помощью весовых матриц функционала качества можно влиять на переходный процесс в замкнутой системе управления. В математической постановке задачи оптимальной стабилизации весовые матрицы функционала считаются заданными. В то же время выбор этих матриц является нетривиальной задачей. В данной работе предлагается ряд алгоритмов для вычисления весовых матриц в линейно-квадратичной задаче управления, которая традиционно называется задачей оптимального управления [4]. Соответственно,

с этой точки зрения, определение весовых матриц квадратичного функционала можно назвать обратной задачей оптимальной стабилизации.

### Обзор литературы

В практике управления динамическими объектами нередко решаются задачи стабилизации. Одним из возможных подходов к решению таких задач является модальный, при котором полюса (моды), замкнутые на модальный регулятор, совпадают с назначенными заранее [4–9]. Для стабилизации систем с одним входом и одним выходом (SISO) используется формула Аккермана [4; 8–9]. Следует отметить работы [8–9], которые имеют практическую направленность благодаря применению специальных преобразований, позволяющих получить так называемую обобщенную формулу Аккермана. Другими исследователями [5; 7] предлагаются подходы к выбору спектра (полюсов) синтезированной системы, которые могут иметь несколько входов (управляющих воздействий) и несколько выходов.

В случае оптимизации переходных процессов решается задача оптимальной стабилизации, которая также находит широкое применение<sup>1</sup> [10–15]. Решение задачи базируется на решении матричного нелинейного уравнения Риккати, содержащего весовые матрицы квадратичного функционала качества [4; 11; 14]. В [10] рассматривается конкретная физическая задача, решение которой выполняется в терминах задач оптимальной стабилизации и назначением полюсов замкнутой системы. Работы<sup>1</sup> [15] посвящены определению весовых коэффициентов квадратичного функционала в предположении, что они диагональные.

В первой вводится условие нормировки коэффициентов весовых матриц; рассматривается множественная постановка задачи синтеза параметров регулятора. Во второй осуществляется разбивка квадратичного функционала, а весовое соотношение между затратами на управление и штрафами за отклонения фазовых координат предлагается определять через построение линий фронта Парето. В отличие от приведенных работ, авторы данной статьи предлагают другой подход к определению весовых матриц квадратичного функционала с последующим определением матрицы оптимального регулятора.

### Материалы и методы

В качестве модели объекта управления рассматриваются следующие уравнения состояния и выхода автономного объекта управления:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + Bu(t), \quad (1)$$

$$Y(t) = CX(t), \quad (2)$$

где  $X(t)$  – вектор состояния объекта управления размерности  $n \times 1$ ,  $u(t)$  – скалярное входное управляющее воздействие;  $Y(t)$  – скалярный выход;  $A$  – постоянная числовая матрица состояния размера  $n \times n$ ;  $B$  – постоянная числовая матрица входа размера  $n \times 1$ ;  $C$  – постоянная числовая матрица выхода размера  $1 \times n$ .

Для применения методов стабилизации объекта (1–2) необходимо, чтобы выполнялось условие полной управляемости по Калману [4]:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & BA & BA^2 & \dots & BA^{n-1}B \end{bmatrix} = n.$$

<sup>1</sup> Куценко А. С., Курко В. А., Лахно С. В. Линейно-квадратичная задача стабилизации в условиях неопределенности критерия качества // Коллекция : сб. науч. тр. «Вестник НТУ «ХПИ». Системный анализ, управление и информационные технологии». 2010. URL: [http://www.kpi.kharkov.ua/archive/Наукова\\_періодика/vestnik/Системний\\_аналіз\\_управління\\_інформаційні\\_технології/2010/67/statya22\\_67.pdf](http://www.kpi.kharkov.ua/archive/Наукова_періодика/vestnik/Системний_аналіз_управління_інформаційні_технології/2010/67/statya22_67.pdf)



Функционал качества  $J$  в задаче стабилизации имеет следующий вид:

$$J = \int_0^{\infty} [X^T Q X + u^T R u] dt = \int_0^{\infty} [X^T Q X + R u^2] dt \rightarrow \min, \quad (3)$$

где  $Q$  – весовая симметрическая положительно определенная числовая матрица;  $R$  – весовой коэффициент больше нуля, действительное число;  $T$  – символ транспонирования.

Решение задачи (1; 3) сводится к решению нелинейного матричного уравнения Риккати [4; 11]. В результате определяется матричный оптимальный коэффициент усиления  $K(r)$ , который включается в обратную связь к заданному объекту управления (1). Если к синтезированной системе прикладывается входное воздействие – управляющее воздействие  $u(t)$ , то замкнутая система с оптимальным регулятором принимает вид:

$$\frac{dX(t)}{dt} = (A - BK_r)X(t) + Bu(t), \quad (4)$$

где матрица  $(A - BK_r)$  является гурвицевой.

В случае применения модального синтеза замкнутая система с модальным регулятором имеет такую же структуру, что и (4) со сменой  $K_r$  на  $K_p$ . При этом собственные числа матрицы состояния системы типа (4) должны быть равны предварительно заданным или выбранными проектировщиком до начала решения задачи модального управления. В этом случае приходится решать задачу о расположении полюсов синтезированной системы [10; 13–14]. Для стабилизации объектов со скалярным управлением может использоваться формула Аккермана, которая дает возможность синтеза модального регулятора до 10-го порядка включительно.

Как для решения задачи синтеза систем стабилизации методом модального управления, так и для оптимальной стабилизации обычно применяется широко известная система MATLAB. Авторы данной работы также отдали предпочтение системе MATLAB (MATLAB R2015b), в которой имеются такие функции как `acker` и `lqr`. Первая реализует алгоритм Аккермана для получения модального регулятора для системы со скалярным управлением, а вторая (linear-quadratic regulator – линейно-квадратичный регулятор) позволяет найти оптимальный регулятор для систем как с векторным, так и со скалярным управлением. Функции `rank` и `ctrb` позволяют проверить систему на полную управляемость по Калману.

Приведем общее выражение, определяющее собой одно из соотношений оптимальности [2–3]:

$$R = B^T S^T Q S B + (E_r + B^T S^T K^T) R (E_r + K S B), \quad (5)$$

где  $S = (A - BK)^{-1}$ ;  $K = K_p; E_r$  – единичная матрица, соответствующая размерности входному управляющему воздействию (для скалярного управления единичная матрица равна единице);  $T$  – символ транспонирования.

Преобразуем соотношение (5) к алгебраическому уравнению:

$$f(Q, R, K) = B^T S^T Q S B + (E_r + B^T S^T K^T) R (E_r + K S B) - R = 0. \quad (6)$$

Для решения уравнения (6) будем считать весовую матрицу  $Q$  диагональной матрицей. В таком случае число неизвестных уравнения (6) будет равно  $2n + 1$ ; решение нелинейного уравнения может быть выполнено по алгоритму Левенберга-Марквардта.

Другой вариант представим в виде

$$f(Q, R) = B^T S^T QSB + (E_r + B^T S^T K^T)R(E_r + KSB) - R = 0. \quad (7)$$

При решении (7) считается, что весовая матрица  $Q$  – диагональная,  $R$  – положительное число, а  $R$  – фиксированная матрица-строка.

Еще один вариант уравнения относительно весовой матрицы  $Q$ :

$$f(Q) = B^T S^T QSB + (E_r + B^T S^T K^T)R(E_r + KSB) - R = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) можно разрешить относительно матрицы  $Q$  с применением псевдообращения Мура-Пенроуза, которое, например, для матрицы  $P$  обозначается в виде  $M^+$ . В (8) значения  $K$  и  $R$  фиксированные. Перечислим свойства псевдообратных матриц (в соответствии с документацией помощи системы MATLAB):

$$B^T S^T Q(SB)(SB)^+ = W(SB)^+;$$

$$B^T S^T Q = W(SB)^+;$$

$$(B^T S^T)^+ (B^T S^T)Q = (B^T S^T)^+ W(SB)^+;$$

$$\left[ (B^T S^T)^+ (B^T S^T) \right]^+ \left[ (B^T S^T)^+ (B^T S^T) \right]Q = \left[ (B^T S^T)^+ (B^T S^T) \right]^+ \left[ (B^T S^T)^+ W(SB)^+ \right];$$

$$Q = \left[ (B^T S^T)^+ (B^T S^T) \right]^+ \left[ (B^T S^T)^+ W(SB)^+ \right].$$

С помощью псевдообратных матриц можно обойти обращение плохо обусловленных матриц. В случае невырожденных матриц псевдообращения результат не изменяют.

Таким образом, выполненные преобразования позволяют определить весовую матрицу  $Q$  квадратичного функционала (3) как симметричную положительно-определенную матрицу. Полученный результат можно проверить обратной подстановкой в уравнение (5).

$$P \cdot M^+ \cdot P = P;$$

$$M^+ \cdot P \cdot M^+ = M^+;$$

$$P \cdot M^+ = E$$

Уравнение (8) разрешим относительно весовой матрицы  $Q$  со своими сомножителями:

$$B^T S^T QSB = R - (E_r + B^T S^T K^T)R(E_r + KSB). \quad (9)$$

Обозначим правую часть уравнения (9) через  $W$  (скалярную величину):

$$W = R - (E_r + B^T S^T K^T)R(E_r + KSB).$$

Перепишем уравнение (9):

$$B^T S^T QSB = W.$$

Выполним следующие преобразования с учетом свойств матрицы Мура-Пенроуза:

## Результаты исследования

Запишем алгоритм моделирования и исследования предлагаемых результатов. Для численного решения уравнения (6) необходимо задать начальные условия в виде одномерного массива действительных чисел. Первые  $n$  чисел предназначаются для диагонали весовой матрицы  $Q$ , следующее одно число – для весового коэффициента  $R$ , последние  $n$  чисел – для коэффициентов оптимального регулятора  $K_r$ . Всего  $2n+1$



неизвестных. На каждой итерации поиска предусматривается формирование квадратной диагональной матрицы  $Q$ . При этом решение задачи модального управления не затрагивается. В качестве решателя нелинейных алгебраических уравнений была использована функция `fsolve` системы MATLAB R2015b. В на-

стройках этой функции были включены системные опции точности вычислений (`eps`) по аргументам и по исследуемой функции: `eps = 2.2204e-16`.

Для тестового примера были приняты следующие матрицы объекта (1), (2) и допущения для начальных условий решения уравнения (6):

Матрица состояния 10-го порядка (матрица  $A$ ):

0.7777	0.0350	0.9491	0.8128	0.2770	0.6861	0.5566	0.4990	0.9589	0.8446
0.2375	0.2984	0.2179	0.0757	0.6954	0.5483	0.0727	0.1068	0.4532	0.6694
0.8243	0.0585	0.3194	0.6565	0.9186	0.1380	0.8397	0.9132	0.1290	0.1093
0.9657	0.8571	0.9178	0.5093	0.2445	0.0988	0.4053	0.3649	0.7606	0.0883
0.9726	0.3729	0.0319	0.4799	0.4581	0.2456	0.1449	0.2266	0.2016	0.9665
0.4534	0.6798	0.0651	0.9556	0.2530	0.1518	0.1909	0.8724	0.1757	0.1943
0.6090	0.2563	0.6298	0.0000	0.3793	0.9260	0.4906	0.1364	0.4371	0.0819
0.7755	0.3476	0.8738	0.2470	0.6045	0.6801	0.7120	0.2364	0.3403	0.2694
0.6416	0.0094	0.0087	0.7122	0.7724	0.2377	0.9849	0.5954	0.9673	0.6501
0.7220	0.3583	0.7466	0.3246	0.0679	0.5689	0.8748	0.5639	0.1430	0.5468

Транспонированная матрица входа  $B$ :

10 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Матрица выхода  $C$ :

0 0 0 0 0 0 0 0 0 1

Коэффициент обхода  $D = 0$ ;

Начальное приближение диагонали матрицы  $Q$ :

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

Начальное приближение весового коэффициента  $R$ : 2.22045e-16

Начальное приближение коэффициентов регулятора:

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

В результате моделирования получены следующие искоемые величины.

Коэффициенты оптимального регулятора:

2.8793734 -50.7547241 -79.8059792  
39.0673666 16.8445818 -17.0079541  
39.6154794 -28.2814376 159.1197789  
-63.5157416

Диагональные элементы весовой матрицы  $Q$ :

1.0000 0.8103 0.9111 0.9451  
0.9917 0.9972 0.8944 0.9878 0.9895  
0.9954

Весовой коэффициент  $R$ : 0.4089034

Полуса системы с оптимальным регулятором:

-15.7869 +0.0000i  
-4.3229 +0.0000i  
-0.3250 +0.7917i  
-0.3250 -0.7917i  
-0.3099 +0.6236i  
-0.3099 -0.6236i  
-0.9630 +0.0000i  
-0.7492 +0.1387i  
-0.7492 -0.1387i  
-0.1969 +0.0000i

Минимальное значение вещественной части полюсов: -15.7869466

Максимальное значение вещественной части полюсов: -0.1969388

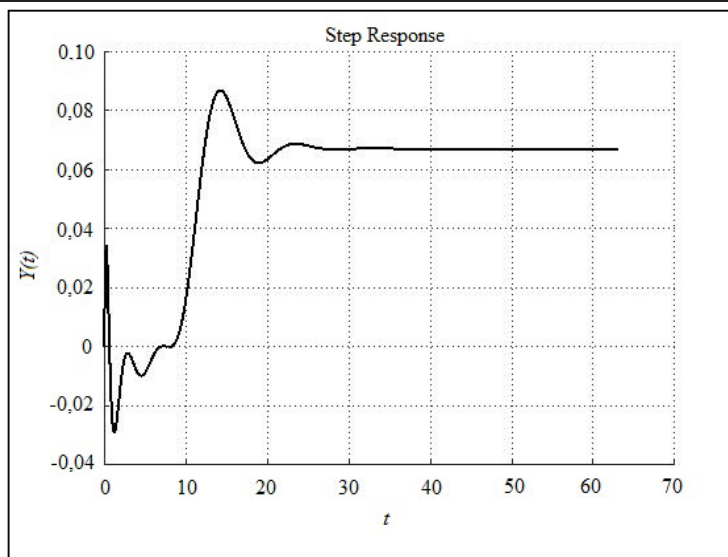
Длительность переходного процесса: 63 ед. времени

Выход системы с оптимальным регулятором на момент окончания времени переходного процесса: 0.6698291

Статический коэффициент передачи системы с оптимальным регулятором: 0.6698279

Диаграмма переходной функции системы с оптимальным регулятором показана на рис. 1.





Р и с. 1. Переходная функция системы с оптимальным регулятором  
F i g. 1. Transient function of a system with an optimal regulator

В системе MATLAB были проведены численные эксперименты по определению весовых матриц функционала для систем до 21-го порядка включительно. Результаты отвечают требованиям задачи оптимальной стабилизации.

Была введена проверка на положительную определенность следующей матрицы:

$$\begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где  $N$  – числовая матрица-столбец, которую принимали нулевой.

Решение уравнения (7) предполагает вычисление матрицы модального регулятора с последующими действиями, рассмотренными для решения уравнения (6). Выполнено также сравнение максимального размаха переходных процессов.

Для примера была рассмотрена модель система управления 6-го порядка. Приведем условия решения задачи.

Матрица состояния  $A$ :

1.5634	-1.0751	0.5442	-0.3167	0.4477	-0.7512
0.9335	-0.5091	0.0240	-1.7554	-1.2410	-1.7889
1.7690	-0.9455	-0.4794	-0.3500	1.1914	-0.2029
-1.1089	0.4026	-0.9119	0.5238	0.2742	-0.8820
-0.0137	-0.3574	0.2476	-1.0311	-1.2246	-1.1429
0.3636	0.5406	1.3243	0.8418	-1.5737	0.8376

Транспонированная матрица входа  $B$ :

10 0 0 0 0 0

Матрица выхода  $C$ : 0 0 0 0 0 1

Коэффициент обхода  $D = 0$ .

Коэффициенты модального регулятора:

2.6511700 45.7014386 -50.6899433  
-85.7341580 -42.1128475 -68.3282054

Полюса системы с модальным регулятором:

-8.0000 -6.5200 -5.0400 -3.5600  
-2.0800 -0.6000

Начальное приближение диагонали матрицы  $Q$ : 1 1 1 1 1 1

Начальное приближение весового коэффициента  $R$ : 1



Расчетные весовые матрицы квадратичного функционала

Весовой коэффициент  $R$ : 0.0020134

Диагональ весовой матрицы  $Q$ :

1.0000 1.0001 1.0011 1.0000  
1.0004 1.0004

Коэффициенты оптимального регулятора:

23.0185296 22.3017594 -42.7035743  
-187.3350864 -29.6831972 -64.6685472

Полуса системы с оптимальным регулятором:

-222.855479+0.000000i

-2.379585+0.806685i

-2.379585-0.806685i

-0.735228+1.263454i

-0.735228-1.263454i

-0.388493+0.000000i

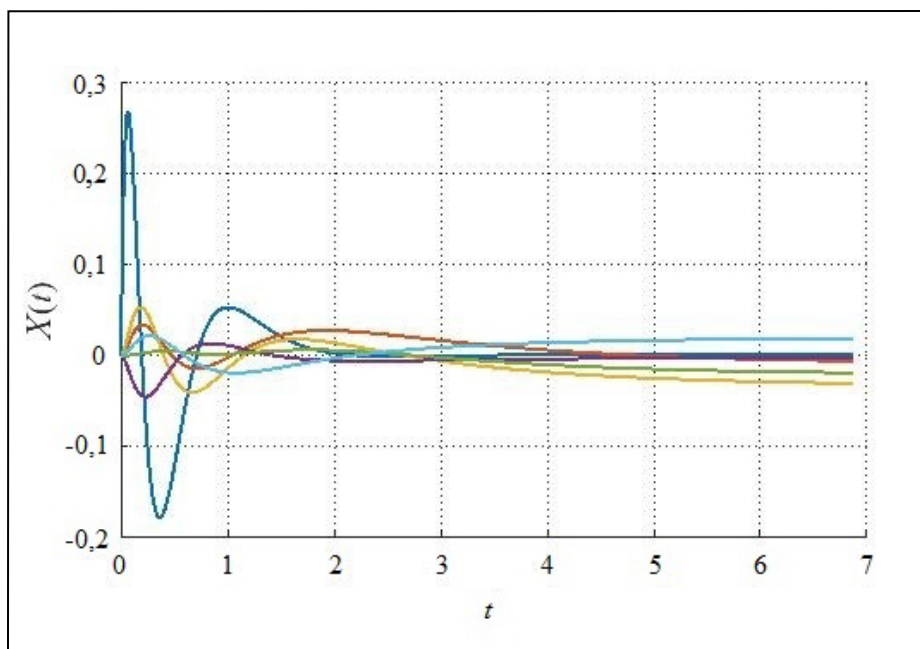
Максимальный размах переходного процесса с модальным регулятором: 0.4452935

Максимальный размах переходного процесса с оптимальным регулятором: 0.0694742

В системе с оптимальным регулятором выбросы (максимальный размах) в переходном процессе значительно меньше, чем в системе с модальным регулятором. Переходные процессы приведены на рис. 2–3.

Диаграммы на рис. 2–3 носят иллюстративный характер в целях сравнения размаха переходного процесса по переменным состояниям.

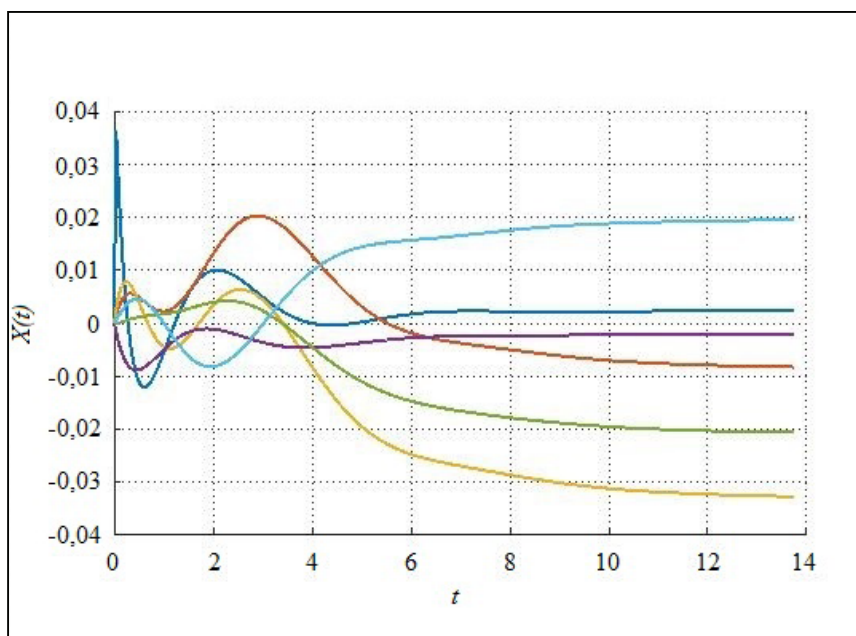
Для случая (8) были использованы и получены следующие результаты.



Р и с. 2. Переходный процесс в системе 6-го порядка

F i g. 2. Transient process in the system of the 6<sup>th</sup> order





Р и с. 3. Переходный процесс в системе с оптимальным регулятором  
F i g. 3. Transient process in a system with an optimal regulator

Модельная матрица состояния  $A$ :

-0.0329	-0.9109	0.6204	-0.1307	0.4115	0.0556	-0.3144	0.6471
-0.2951	-0.4629	-0.6453	-0.0114	-0.9203	0.4595	0.8633	-1.0154
-0.5548	0.1227	-0.3651	-0.3651	-0.5611	-1.1444	0.8507	1.3058
0.5644	0.0900	-0.5834	-0.9234	-0.3199	1.4071	0.0305	-0.4932
-0.1337	0.3199	-1.3698	-0.2998	1.8972	0.2395	0.3836	-0.9348
-1.6757	1.0635	0.5432	1.4971	-0.3906	0.1281	0.3905	0.1489
-0.3487	0.9011	-1.7078	1.3880	-0.0519	-0.1056	0.2848	-1.2745
0.8456	0.2872	-0.0646	0.0054	1.0352	-0.4961	0.5555	0.7013

Модельная матрица входа  $B$  (транспонированная):

0.7643	-0.6050	-1.0350	0.2014
0.6680	-0.3235	1.3343	0.6214

Система полностью управляема по Калману.

Желаемые полюса для расчета модального регулятора:

-0.8000	-2.9714	-5.1429	-7.3143
-9.4857	-11.6571	-13.8286	-16.0000

Полюса замкнутой системы управления с модальным регулятором

-16.0000	-13.8286	-11.6571	-9.4858
-7.3143	-0.8000	-5.1429	-2.9714

Назначенный весовой коэффициент  $R = 1.3000e-06$



### Расчетная весовая матрица $Q$ :

57.3879	-63.5128	-81.7260	130.5607	45.2151	82.3533	-55.5829	69.1678
-63.5128	70.2915	90.4485	-144.4953	-50.0409	-91.1427	61.5152	-76.5500
-81.7260	90.4485	116.3858	-185.9312	-64.3908	-117.2791	79.1554	-98.5017
130.5607	-144.4953	-185.9312	297.0330	102.8670	187.3583	-126.4542	157.3607
45.2151	-50.0409	-64.3908	102.8670	35.6244	64.8850	-43.7930	54.4964
82.3533	-91.1427	-117.2791	187.3583	64.8850	118.1793	-79.7630	99.2578
-55.5829	61.5152	79.1554	-126.4542	-43.7930	-79.7630	53.8346	-66.9923
69.1678	-76.5500	-98.5017	157.3607	54.4964	99.2578	-66.9923	83.3658

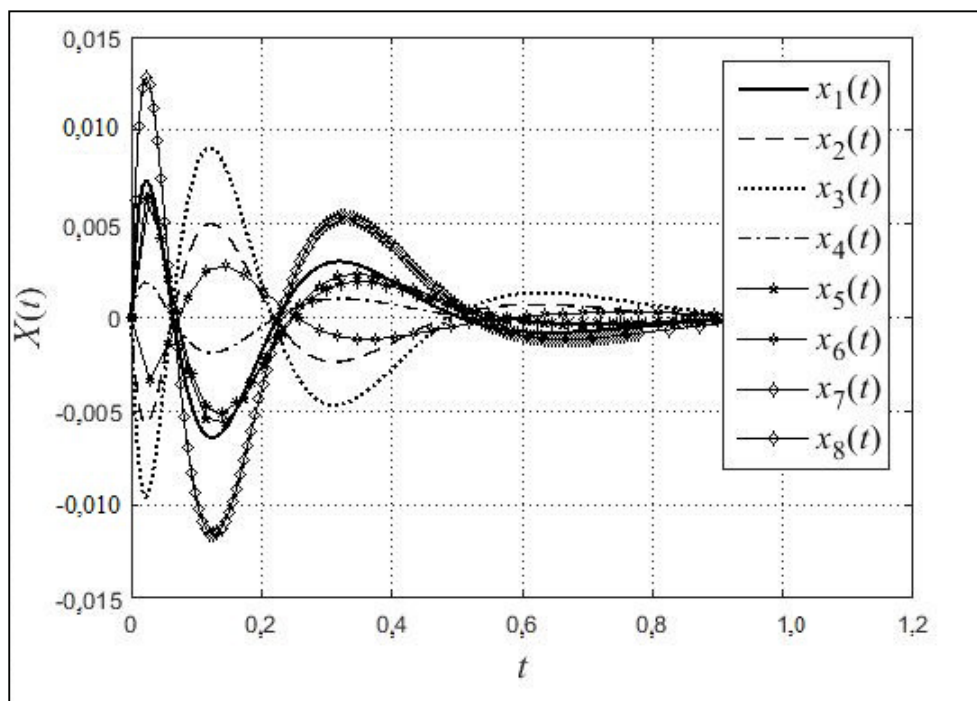
Максимальный размах переходного процесса с модальным регулятором: **0.0244827**

Максимальный размах переходного процесса с оптимальным регулятором: **0.0000800**

Как видно, в системе с модальным регулятором перерегулирование значительно выше, чем в системе с оптимальным регулятором, для которого предварительно была рассчитана весовая матрица  $Q$ .

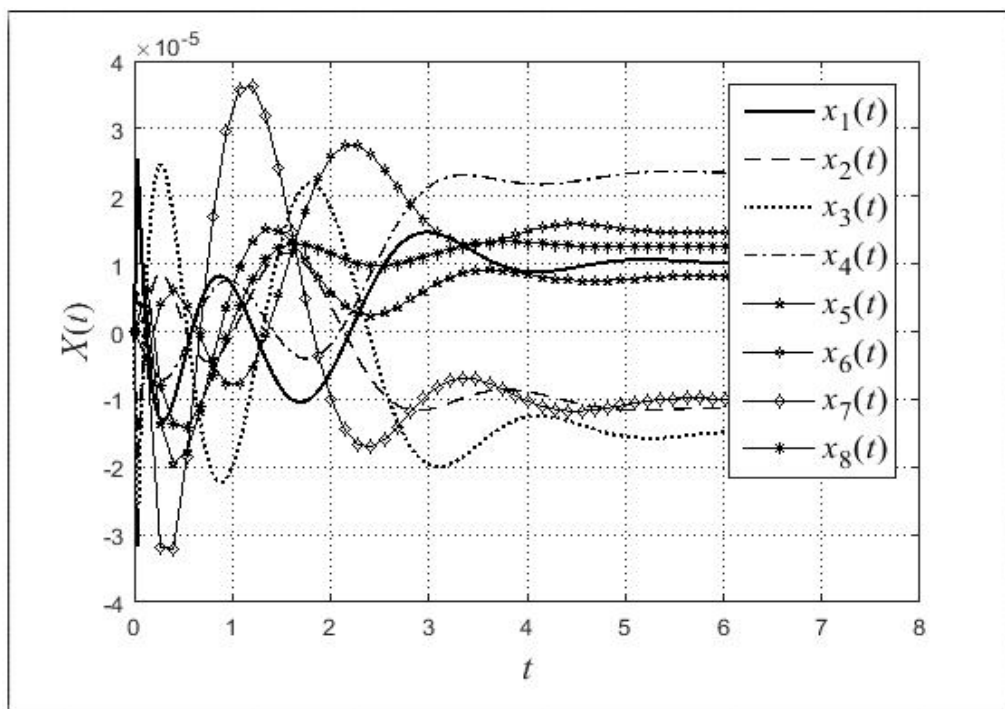
Следует отметить, что в рассматриваемом случае большее влияние имеет расчет модального регулятора, матрица которого участвует в решении обратной задачи оптимальной стабилизации, в определении весовой матрицы  $Q$  квадратичного функционала. Проблема, прежде всего, заключается в назначении желаемых полюсов для замкнутой на модальный регулятор системы.

Диаграммы переходных процессов представлены на рис. 4–5.



Р и с. 4. Переходный процесс в системе с модальным регулятором

F i g. 4. Transient process in a system with a modal regulator



Р и с. 5. Переходный процесс в системе с оптимальным регулятором

F i g. 5. Transient process in a system with an optimal regulator

### Обсуждение и заключения

Задача стабилизации динамических объектов управления имеет широкое распространение. Это показывает даже небольшой обзор литературных источников. Решение обратной задачи оптимальной стабилизации также находит свое отражение в публикациях многих авторов. Таким образом, выполненная работа по исследованию возможностей решения обратной задачи оптимальной стабилизации находится в русле современных исследований по решению данной задачи. Авторы осуществляли моделирование на моделях объектов, матрицы которых формировались случайным образом, как правило, по нормальному закону.

Условием применимости таких матриц  $A$  и  $B$  модельного объекта являлась их полная управляемость в соответствии с критерием управляемо-

сти по Калману. Предложенные три варианта решения обратной задачи оптимальной стабилизации позволяют использовать их в зависимости от исходных данных для проектирования систем стабилизации. Точность расчетов зависит от вычислительных возможностей компьютеров и методов, например, решения нелинейных уравнений.

Следует учитывать, что матричные операции больших размерностей определенно влекут за собой накопление вычислительных погрешностей. Однако на практике, как правило, размерности исследуемых объектов управления не превышают 10-го порядка. В частности, размещение полюсов для решения задачи модального управления не должно превышать размерность объекта управления больше, чем на шесть единиц [4]. В связи с этим предложен-



ные подходы к решению обратной задачи оптимальной стабилизации имеют право на существование.

При этом авторы не считают предложенный в статье подход оптимальной стабилизации достаточно универсальным; с его помощью раздвигаются границы теории оптимальной стабилизации линейных стационарных объек-

тов и систем управления. Как видно из примеров, решение задачи оптимальной стабилизации связано с применением матричных операций, численном решении алгебраических уравнений, а также решении нелинейного матричного уравнения Риккати с помощью функции `lqr` системы компьютерной математики MATLAB.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Афонин В. В.** Аналитический контроль решения задачи оптимальной стабилизации стационарного объекта со скалярным управлением // Вестник Мордовского университета. 1998. № 3–4. С. 122–123. URL: <http://vestnik.mrsu.ru/content/pdf/98-34.pdf>
2. **Афонин В. В.** Синтез линейной оптимальной системы с заданной степенью экспоненциальной устойчивости // Вестник Мордовского университета. 2001. № 1–2. С. 70–72. URL: <http://vestnik.mrsu.ru/content/pdf/01-12.pdf>
3. **Афонин В. В., Мурюмин С. М.** Соотношения оптимальности в линейно-квадратичной задаче управления // Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16, № 2. С. 118–120. URL: [http://journal.svmo.ru/files/issues/ZhurnalSVMO\\_2014\\_16\\_2.pdf](http://journal.svmo.ru/files/issues/ZhurnalSVMO_2014_16_2.pdf)
4. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. 2005. Вып. 5. С. 7–46. URL: <http://www.mathnet.ru/links/6ce9f2a7ab78fdde0e8571c3895bf4fe/at1366.pdf>
5. **Blanchini F.** New canonical form for pole placement // IEEE Proceedings D (Control Theory and Applications). 1989. Vol. 136, no. 6. P. 314–316. URL: <http://digital-library.theiet.org/content/journals/ip-d/136/6>
6. Static output feedback – A survey / V. L. Syrmos [et al.] // Automatica. 1997. Vol. 33, no. 2. P. 125–137. URL: <http://www2.egr.uh.edu/~mece2hv/Papers/30.pdf>
7. **Eremenko A., Gabrielov A.** Poleplacement by static output feedback for generic linear systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2002. Vol. 41, no. 1. P. 303–312. URL: <http://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/S0363012901391913>
8. Синтез стабилизирующего управления космическим аппаратом на основе обобщенной формулы Аккермана / Е. А. Воробьева [и др.] // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2011. № 1. С. 116–126. URL: [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_15598578\\_34872720.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_15598578_34872720.pdf)
9. **Зубов Н. Е., Микрин Е. А., Рябченко В. Н.** Синтез астатической линейной системой на основе обобщенной формулы Аккермана // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана (Сер. «Приборостроение»). 2017. № 1. С. 67–74. URL: [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_28340936\\_67741067.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_28340936_67741067.pdf)
10. **Veremey E.** Spectral approach to H-optimization of plasma control // International Journal of Modern Physics. 2009. Vol. 24, no. 5. С. 1009–1018. URL: <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217751X09044462>
11. **Petersen I. R., Hollot C. V.** A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems // Automatica. 1986. Vol. 22, no. 4. С. 397–411. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/journal/00051098/22/4>
12. **Аполонский В. В., Тарарыкин С. В.** Методы синтеза редуцированных регуляторов состояний линейных динамических систем // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 6. С. 25–33. URL: <http://naukarus.com/metody-sinteza-redutsirovannyh-regulyatorov-sostoyaniya-lineynyh-dinamicheskikh-sistem>
13. **Антоник В. Г., Срочко В. А.** Метод проекций в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 4. С. 564–572. URL: <http://www.mathnet.ru/links/d050f5ccbbd3534105cb58ca0c2e3e1f/zvmmf1906.pdf>

14. Polyak B. T., Shcherbakov P. S. Optimization and asymptotic stability // International Journal of Control. 2016. С. 1–7. URL: [https://www.researchgate.net/publication/309712271\\_Optimization\\_and\\_Asymptotic\\_Stability](https://www.researchgate.net/publication/309712271_Optimization_and_Asymptotic_Stability)

15. Романова И. К. Об одном подходе к определению весовых коэффициентов метода пространства состояний // Наука и Образование : электронный журнал МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2015. № 4. С. 105–129. URL: <http://technomag.edu.ru/jour/article/view/315/317>

Поступила 24.05.2017; принята к публикации 03.10.2017; опубликована онлайн 19.12.2017

Об авторах:

**Афонин Виктор Васильевич**, доцент кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления, Институт электроники и светотехники, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68), кандидат технических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7976-9792>, [vvafonin53@yandex.ru](mailto:vvafonin53@yandex.ru)

**Мурюмин Сергей Михайлович**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, факультет математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2965-7500>, [muryuminsm@mail.ru](mailto:muryuminsm@mail.ru)

Вклад соавторов:

В. В. Афонин: постановка задачи, сбор доступных материалов по теме исследования, компьютерная реализация алгоритмов; С. М. Мурюмин: выбор и обоснование численных методов решения нелинейных алгебраических уравнений, анализ материалов по теме исследования, доработка текста.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

## REFERENCES

1. Afonin V. V. Analytical control of the solution of the problem of optimal stabilization of a stationary object with scalar control. *Vestnik Mordovskogo universiteta* = Mordovia University Bulletin. 1998; 3-4:122–123. Available at: <http://vestnik.mrsu.ru/content/pdf/98-34.pdf> (In Russ.)

2. Afonin V. V. Synthesis of a linear optimal system with a given degree of exponential stability. *Vestnik Mordovskogo universiteta* = Mordovia University Bulletin. 2001; 1-2:70–72. Available at: <http://vestnik.mrsu.ru/content/pdf/01-12.pdf> (In Russ.)

3. Afonin V. V., Muryumin S. M. Optimality relations in a linearly-quadratic control problem. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* = Journal of the Middle Volga Mathematical Society. 2014; 16(2):118–120. Available at: [http://journal.svmo.ru/files/issues/ZhurnalSVMO\\_2014\\_16\\_2.pdf](http://journal.svmo.ru/files/issues/ZhurnalSVMO_2014_16_2.pdf) (In Russ.)

4. Polyak B. T., Shcherbakov P. S. Difficult problems of linear control theory. Some approaches to the solution. *Avtomatika i telemekhanika* = Automation and Telemekhanics. 2005; 5:7–46. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/6ce9f2a7ab78fdde0e8571c3895bf4fe/at1366.pdf> (In Russ.)

5. Blanchini F. New canonical form for pole placement. IEE Proceedings – Control Theory and Applications. 1989; 136(6):314–316. Available at: <http://digital-library.theiet.org/content/journals/ip-d/136/6> (In Russ.)

6. Syrmos V. L., Abdallah C. T., Dorato P., Grigoriadis K. Static output feedback – A survey. *Automatica*. 1997; 33(2):125–137. Available at: <http://www2.egr.uh.edu/~mece2hv/Papers/30.pdf>

7. Eremenko A., Gabriellov A. Pole placement by static output feedback for generic linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2002; 41(1):303–312. Available at: <http://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/S0363012901391913>

8. Vorobeva E. A., Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N., Timakov S. N. Synthesis of a stabilizing control the spacecraft on the basis of the generalized Ackermann's formula.



*Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya* = Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems. 2011; 1:116–126. Available at: [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_15598578\\_34872720.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_15598578_34872720.pdf) (In Russ.)

9. Zubov N. E., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N. Synthesis of an astatic linear system on the basis of the generalized Akkerman formula. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana: Priborostroeniye* = Bauman MSTU Bulletin: Instrument Making. 2017; 1:67–74. Available at: [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_28340936\\_67741067.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_28340936_67741067.pdf) (In Russ.)

10. Veremey E. Spectral approach to H-optimization of plasma control. *International Journal of Modern Physics*. 2009; 24(5):1009–1018. Available at: <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217751X09044462> (In Russ.)

11. Petersen I. R., Holot C. V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. *Automatica*. 1986; 22:397–411. Available at: <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217751X09044462>

12. Apolonsky V. V., Tararykin S. V. Methods of synthesis of reduced state regulators of linear dynamical systems. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya* = *Izvestiya Rossiyskoy Academy of Sciences. Theory and Control systems*. 2014; 6:25–33. Available at: <http://naukarus.com/metody-sinteza-redutsirovannyh-regulyatorov-sostoyaniya-lineynyh-dinamicheskikh-sistem> (In Russ.)

13. Antonik V. G., Srochko V. A. The method of projections in linear-quadratic optimal control problems. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1998; 38(4):564–572. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/d050f5ccbbd3534105cb58ca0c2e3e1f/zvmmf1906.pdf> (In Russ.)

14. Polyak B. T., Shcherbakov P. S. Optimization and asymptotic stability. *International Journal of Control*. 2016; 1–7. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/309712271\\_Optimization\\_and\\_Asymptotic\\_Stability](https://www.researchgate.net/publication/309712271_Optimization_and_Asymptotic_Stability)

15. Romanova I. K. On an approach to determining the weight coefficients of the state space method. *Nauka i Obrazovaniye* = Science and Education. 2015; 4:105–129. Available at: <http://technomag.edu.ru/jour/article/view/315/317> (In Russ.)

*Submitted 24.05.2017; revised 03.10.2017; published online 19.12.2017*

*About the authors:*

**Victor V. Afonin**, Associate Professor of Chair of Automated Information Processing and Control Systems, Institute of Electronics and Lighting Engineering, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Engineering), Associate Professor, **ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7976-9792>**, [vvafonin53@yandex.ru](mailto:vvafonin53@yandex.ru)

**Sergey M. Muryumin**, Associate Professor of Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St, Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, **ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2965-7500>**, [muryuminsm@mail.ru](mailto:muryuminsm@mail.ru)

*Contribution of the co-authors:*

V. V. Afonin: statement of the problem, collection of data on the topic, computer implementation of algorithms; S. M. Muryumin: choice and justification for numerical methods of solving nonlinear algebraic equations, data analysis, revision of the text.

*All authors have read and approved the final version of the manuscript.*