http://vestnik.mrsu.ru ISSN Print 0236-2910
ISSN Online 2313-0636

УДК 517.93 DOI: 10.15507/0236-2910.027.201704.490-503

Априорные оценки решения однородной краевой задачи для уравнений параболического типа методом Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных сетках

Р. В. Жалнин*, **В. Ф. Масягин**, **Е. Е. Пескова**
ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия)
**zhrv@mrsu.ru*

Введение. В работе представлены априорные оценки точности решения однородной краевой задачи для параболического уравнения методом Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных сетках.
Материалы и методы. Для решения поставленной задачи применяется унифицированный подход по исследованию ошибок аппроксимации уравнений диффузионного типа с помощью метода Галеркина с разрывными базисными функциями, предложенный в 2002 г. P. Castillo, B. Cockburn и др.
Результаты исследования. В статье приводятся ошибки аппроксимации, зависящие от характеристического размера ячеек и степени используемых в базисных функциях полиномов; формулируются необходимые для решения задачи леммы; проводится полное доказательство сформулированных лемм. В результате исследования была сформулирована и доказана теорема, в которой приводятся априорные оценки для решения параболических уравнений с помощью метода Галеркина на разнесенных сетках.
Обсуждение и заключения. Полученные результаты согласуются с аналогичными исследованиями других авторов и дополняют их. Дальнейшая работа по данной тематике предполагает исследование уравнений диффузионного типа порядка выше единицы и получение апостериорных оценок погрешности.

Ключевые слова: априорная оценка погрешности, конечный элемент, метод Галеркина, разрывные базисные функции, параболическая задача

Для цитирования: Жалнин Р. В., Масягин В. Ф., Пескова Е. Е. Априорные оценки решения однородной краевой задачи для уравнений параболического типа методом Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных сетках // Вестник Мордовского университета. 2017. Т. 27, № 4. С. 490–503. DOI: 10.15507/0236-2910.027.201704.490-503

Благодарности: Авторы выражают признательность и благодарность члену-корреспонденту РАН В. Ф. Тишкину, чьи рекомендации помогли улучшить статью. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ; базовая часть государственного задания 1.6958.2017/8.9.

A Priori Estimates of Solution of a Homogeneous Boundary Value Problem for Parabolic Type Equations by the Discontinuous Galerkin Method on Staggered Grids

R. V. Zhalnin*, V. F. Masyagin, Ye. Ye. Peskova
National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)
**zhrv@mrsu.ru*

Introduction. In this paper, we present a priori error analysis of the solution of a homogeneous boundary value problem for a second-order differential equation by the discontinuous Galerkin method on staggered grids.
Materials and Methods. This study is based on the unified hp-version error analysis of local discontinuous Galerkin method proposed by Castillo et al. [Optimal a priori error estimates for the hp-version of the local discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems, 2002]. The purpose of this paper is to present a new approach to the error analysis of the solution of parabolic equations by the discontinuous Galerkin method on staggered grids.
Results. We suggest that approximation errors depend on the characteristic size of the cells and the degree of polynomials used in the basis functions. The necessary lemmas are formulated for the problem solution. The complete proof of the lemmas formulated is carried out. We formulated and proved a theorem, in which a priori error estimates are given for solving parabolic equations using the discontinuous Galerkin method on staggered grids.
Discussion and Conclusions. The obtained results are consistent with similar studies of other authors and complement them. Further work on this topic involves the study of diffusion-type equations of order higher than the first and the production of a posteriori error estimates.

Keywords: a priori error analysis, finite elements, discontinuous Galerkin methods, discontinuous basis functions, parabolic problems

For citation: Zhalnin R. V., Masyagin V. F., Peskova Ye. Ye. A Priori Estimates of Solution of a Homogeneous Boundary Value Problem for Parabolic Type Equations by the Discontinuous Galerkin Method on Staggered Grids. *Vestnik Mordovskogo universiteta* = Mordovia University Bulletin. 2017: 27(4):490–503. DOI: 10.15507/0236-2910.027.201704.490-503

Acknowledgements: The authors express their appreciation and gratitude to Corresponding Member of Russian Academy of Sciences V. F. Tishkin, whose detailed comments and recommendations helped to improve the article. The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation: basic part of the State Task 1.6958.2017 / 8.9.

Введение

В работах [1–5] предложен метод на основе метода Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных сетках для уравнений параболического типа. Отличительной особенностью метода является то, что аппроксимация градиента искомой функции производится на двойственной сетке, состоящей из медианных контрольных объемов, связанных с узлами основной сетки.

В данной работе оценивается ошибка аппроксимации решения следующей краевой задачи для параболического уравнения с помощью ранее предложенного метода:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x),\ x\in(a,b), \qquad (1)$$

$$u(a)=u(b)=0. \qquad (2)$$

Обзор литературы

Исследование локального метода Галеркина с разрывными базисными функциями применительно к зависящим от времени задачам конвекциидиффузии было выполнено в работах B. Cockburn и C. W. Shu [6], B. Cockburn и C. Dawson [7], P. Castillo, B. Cockburn, D. Schötzau и Ch. Schwab [8].

Применительно к чисто эллиптическим задачам локальный метод Галеркина с разрывными базисными функциями тесно связан с т. н. методами внутреннего штрафа (interior penalty methods), исследованными в работах I. Babuška и M. Zlaman [9], J. Douglas и T. Dupont [10], G. A. Baker [11], M. F. Wheeler [12], T. Rusten, P. S. Vassilevski и R. Winther [13], R. Becker и P. Hansbo [14]. В данных исследованиях приводится т. н. обобщенный анализ погрешности представленных выше методов.

В России оценки погрешности аппроксимации задач эллиптического типа с помощью т. н. гибридизированного варианта схемы разрывного метода Галеркина представлены в работе Р. З. Даутова и Е. М. Федотова [15]. Данная работа продолжает эту череду работ и представляет анализ априорных оценок решения параболических уравнений с помощью метода Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных сетках [1–5].

Материалы и методы

Накроем отрезок $[a,b]$ равномерной сеткой T_V

$$a = x_{1/2} < x_{3/2} < \ldots < x_{i-1/2} < \\ < x_{i+1/2} < \ldots < x_{N-1/2} < x_{N+1/2} = b.$$

Размер ячейки обозначим $h = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}, i = 0,\ldots,N.$

Также введем в рассмотрение двойственную сетку T_W

$$a = x_{1/2} < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \\ < x_{i+1} < \ldots < x_N < x_{N+1/2} = b,$$

где $x_i = \frac{1}{2}\left(x_{i-1/2} + x_{i+1/2}\right), i = 1,\ldots,N.$

Обозначим ячейки сетки T_V за $I_i = \left(x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right)$, $i = 1,\ldots,N-1$. Ячейки сетки T_W обозначим $I_{1/2} = \left(x_{1/2}, x_1\right)$, $I_{N+1/2} = \left(x_N, x_{N+1/2}\right)$, $I_{i+1/2} = \left(x_i, x_{i+1}\right)$, $i = 1,\ldots,N-1$.

Для удобства дальнейших рассуждений введем в рассмотрение сетку T_Q $a = x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < \ldots < x_{N-1/2} < x_N < x_{N+1/2} = b$, ячейки которой обозначим за $\Upsilon_i^- = \left(x_{i-1/2}, x_i\right)$, $\Upsilon_i^+ = \left(x_i, x_{i+1/2}\right)$, $i = 1,\ldots,N$.

В случае, когда это не влияет на ход рассуждений, верхние и нижние индексы будем опускать. Размер ячеек сетки T_Q обозначим $h_\Upsilon = 0.5h$.

Значения «слева» и «справа» от узлов сетки обозначим следующим образом:

$$u_i^- = \lim_{\varepsilon\to 0} u(x_i - \varepsilon), u_i^+ = \lim_{\varepsilon\to 0} u(x_i + \varepsilon),$$

$$u_{i+1/2}^- = \lim_{\varepsilon\to 0} u(x_{i+1/2} - \varepsilon), u_{i+1/2}^+ = \lim_{\varepsilon\to 0} u(x_{i+1/2} + \varepsilon).$$

Введем следующие обозначения:

$$[[u_i]] = \left(u_i^+ - u_i^-\right),$$
$$[[u_{i+1/2}]] = \left(u_{i+1/2}^+ - u_{i+1/2}^-\right),$$
$$[[u_{1/2}]] = \left(u_{1/2}^+\right), \quad [[u_{N+1/2}]] = \left(u_{N+1/2}^-\right)$$

Обозначим $\|\cdot\|_{m,I_i}$ и $|\cdot|_{m,I_i}$ норму и полунорму в пространстве $H^m\left(I_i\right)$, которые стандартным образом определяются как:

$$\|v\|_{m,I_i} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \int_{I_i} \left|\frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha}\right|^2\right)^{1/2},$$

$$|v|_{m,I_i} = \left(\sum_{|\alpha|= m} \int_{I_i} \left|\frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha}\right|^2\right)^{1/2}.$$

Обозначение $\|\cdot\|_{0,I_i}$ будем использовать для нормы в пространстве $L^2\left(I_i\right)$.

Справедливы следующие две леммы, доказанные в работе Ф. Сьярле[1].

[1] **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач. М. : Мир, 1980. 512 с.

Лемма 1

Пусть $w \in H^{r+1}(I_i)$, при этом $r \geq 0$, $I_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$. Пусть Π – линейный непрерывный оператор из $H^{r+1}(I_i)$ в $P^k(I_i)$, причем $\Pi w = w$, $\forall w \in P^k(I_i)$. Тогда для целых m, $0 \leq m \leq r+1$, справедливы оценки:

$$\left|w - \Pi w\right|_{m,I_i} \leq C h_i^{\min\{r,k\}+1-m} \left\|w\right\|_{r+1,I_i},$$

$$\left|(w - \Pi w)_{i-1/2}\right| \leq C h_i^{\min\{r,k\}+1/2} \left\|w\right\|_{r+1,I_i},$$

$$\left|(w - \Pi w)_{i+1/2}\right| \leq C h_i^{\min\{r,k\}+1/2} \left\|w\right\|_{r+1,I_i}.$$

Лемма 2

Существуют положительные C_{inv}, k такие, что для всех $w \in P^k(I_i)$, справедливы оценки:

$$\left|w_{i-1/2}\right| \leq C_{inv} h_i^{-1/2} \left\|w\right\|_{0,I_i},$$

$$\left|w_{i+1/2}\right| \leq C_{inv} h_i^{-1/2} \left\|w\right\|_{0,I_i},$$

где $I_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$.

Определим следующие пространства:

$$V = \left\{u \in L^2(a,b) : u\big|_{I_i} \in H^{s+2}(I_i), \ \forall i = 1,...,N, s \geq 0\right\},$$

$$W = \left\{q \in L^2(a,b) : q\big|_{I_{i+1/2}} \in H^{s+1}(I_{i+1/2}), \ \forall i = 0,...,N, s \geq 0\right\}$$

$$V_h = \left\{u \in L^2(I_i) : u\big|_{I_i} \in P^k(I_i), \forall i = 1,...,N\right\}$$

$$W_h = \left\{q \in L^2(I_{i+1/2}) : q\big|_{I_{i+1/2}} \in P^k(I_{i+1/2}), \ \forall i = 0,...,N\right\}.$$

Дополнительно будем предполагать, что для элементов пространств V_h и W_h справедливо утверждение:

если $v \in V_h$, $\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial v}{\partial x} w dx = 0$, $\forall w \in W_h$,

то $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ в I_i, $i = 1,...,N$. (3)

Перепишем (1–2) в виде

$$q(x) - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ x \in (a,b), \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x} = f(x), \ x \in (a,b), \tag{5}$$

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{6}$$

Согласно методу Галеркина с разрывными базисными функциями [6], приближенное решение $(q_h, u_h) \in W_h \times V_h$ задачи (4–6) будем искать как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{gathered}\int_{\Upsilon_i^-} q_h w dx + \int_{\Upsilon_i^+} q_h w dx - \widehat{u}_h w \big|_{x_{i-1/2}}^{x_i} + \\ + \int_{\Upsilon_i^-} u_h w' dx - \widehat{u}_h w \big|_{x_i}^{x_{i+1/2}} + \int_{\Upsilon_i^+} u_h w' dx = 0,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\int_{\Upsilon_i^-} \frac{\partial u_h}{\partial t} v dx + \int_{\Upsilon_i^+} \frac{\partial u_h}{\partial t} v dx - \widehat{q}_h v \big|_{x_{i-1/2}}^{x_i} + \\ + \int_{\Upsilon_i^-} q_h v' dx - \widehat{q}_h v \big|_{x_i}^{x_{i+1/2}} + \int_{\Upsilon_i^+} q_h v' dx = \int_{I_i} f v dx,\end{gathered} \tag{8}$$

где $i = 1,...,N$, $(v,w) \in W_h \times V_h$, $\widehat{u}_h$, $\widehat{q}_h$ – численные потоки, зависящие от значений «слева» и «справа» от узлов сетки. Для численных потоков выполняется условие согласования:

$$\begin{gathered}\widehat{u}_h(q_i, u_i; q_i, u_i) = u_i, \\ \widehat{u}_h(q_{i+1/2}, u_{i+1/2}; q_{i+1/2}, u_{i+1/2}) = u_{i+1/2},\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\widehat{q}_h(q_i, u_i; q_i, u_i) = q_i, \\ \widehat{q}_h(q_{i+1/2}, u_{i+1/2}; q_{i+1/2}, u_{i+1/2}) = q_{i+1/2}.\end{gathered} \tag{10}$$

Суммируем выражения (7–8) по всем ячейкам сетки, получим:

$$\begin{gathered}\int\limits_a^b q_h w dx + \sum_{i=1}^N \widehat{u}_{hi}[[w_i]] + \\ + \sum_{i=1}^N \left[\int_{\Upsilon_i^-} u_h w' dx + \int_{\Upsilon_i^+} u_h w' dx\right] = 0,\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_a^b \frac{\partial u_h}{\partial t} v dx + \sum_{i=0}^N \widehat{q}_{hi+1/2}[[v_{i+1/2}]] + \\ + \sum_{i=1}^N \left[\int_{\Upsilon_i^-} q_h v' dx + \int_{\Upsilon_i^+} q_h v' dx\right] = \int\limits_a^b f v dx.\end{gathered} \tag{12}$$

Потоки будем вычислять следующим образом:

$$\widehat{u}_{hi} = u_{hi}\ ,\ \ i = 1,...,N\ ; \qquad (13)$$

$$\widehat{q}_{hi+1/2} = q_{hi+1/2} + C_{11}[[u_{hi+1/2}]]\ i = 1,...,N; \qquad (14)$$

$$\widehat{u}_{h1/2} = \widehat{u}_{hN+1/2} = 0\ . \qquad (15)$$

Здесь

$$C_{11} = \varsigma h^{\alpha}\ , \qquad (16)$$

где $\varsigma > 0$, $-1 \le \alpha \le 0$, которые не зависят от размера сетки.

Результаты исследования

Подставив (13–15) в систему (11–12), получим:

$$\int\limits_a^b q_h w dx + \sum_{i=1}^{N} u_{hi}[[w_i]] + \sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\Upsilon_i^-} u_h w' dx + \int_{\Upsilon_i^+} u_h w' dx\right] = 0, \qquad (17)$$

$$\int\limits_a^b \frac{\partial u_h}{\partial t} v dx + \sum_{i=0}^{N} q_{hi+1/2}[[v_{i+1/2}]] + \sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\Upsilon_i^-} q_h v' dx + \int_{\Upsilon_i^+} q_h v' dx\right] + \sum_{i=0}^{N} C_{11}[[u_{hi+1/2}]][[v_{i+1/2}]] = \int\limits_a^b f v dx. \qquad (18)$$

Определим следующую проекцию: найти $(\tilde{u}_h, \tilde{q}_h):[0,T] \to V_h \times W_h$, удовлетворяющие условию:

$$\int\limits_a^b (q - \tilde{q}_h) w dx + \sum_{i=1}^{N}(u - \tilde{u}_{hi})[[w_i]] + \sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\Upsilon_i^-}(u - \tilde{u}_h) w' dx + \int_{\Upsilon_i^+}(u - \tilde{u}_h) w' dx\right] = 0, \forall w \in W_h \qquad (19)$$

$$\sum_{i=0}^{N}(q_{i+1/2} - \tilde{q}_{hi+1/2})[[v_{i+1/2}]] + \sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\Upsilon_i^-}(q - \tilde{q}_h) v' dx + \int_{\Upsilon_i^+}(q - \tilde{q}_h) v' dx\right] + \sum_{i=0}^{N} C_{11}[[u_{i+1/2} - \tilde{u}_{hi+1/2}]][[v_{i+1/2}]] = 0, \quad \forall v \in W_h. \qquad (20)$$

Обозначим за Π_1 и Π_2 L^2 – проекторы на пространства V_h и W_h соответственно. Получим:

$$u - \tilde{u}_h = (u - \Pi_1 u) - (\tilde{u}_h - \Pi_1 u) = \Theta_u - \xi_u,$$

$$q - \tilde{q}_h = (q - \Pi_2 q) - (\tilde{q}_h - \Pi_2 q) = \Theta_q - \xi_q,$$

Несложно показать, что

$$\sum_{i=1}^{N} u_{hi}[[w_i]] + \sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\Upsilon_i^-} u_h w' dx + \int_{\Upsilon_i^+} u_h w' dx\right] + \sum_{i=1}^{N} w_{i+1/2}[[u_{hi+1/2}]] + \sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\Upsilon_i^-} w u_h' dx + \int_{\Upsilon_i^+} w u_h' dx\right] = 0 \qquad (21)$$

для $(w, u_h) \in W_h \times V_h$.

Сложим (19) и (20) и получим в компактном виде

$$\mathrm{A}(q - \tilde{q}_h, u - \tilde{u}_h; w, v) = 0\ , \qquad (22)$$

где форма А определена следующим образом:

$$\mathrm{A}(q_h, u_h; w, v) = \int\limits_a^b q_h w dx + \sum_{i=1}^{N} u_{hi}[[w_i]] + \sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\Upsilon_i^-} u_h w' dx + \int_{\Upsilon_i^+} u_h w' dx\right] + \sum_{i=0}^{N} q_{hi+1/2}[[v_{i+1/2}]] + \sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\Upsilon_i^-} q_h v' dx + \int_{\Upsilon_i^+} q_h v' dx\right] + \sum_{i=0}^{N} C_{11}[[u_{hi+1/2}]][[v_{i+1/2}]] = 0. \qquad (23)$$

Введем в рассмотрение двойственную задачу:

$$-\phi'' = \lambda \ \text{ в } (a,b), \qquad (24)$$

$$\phi(a) = \phi(b) = 0\ . \qquad (25)$$

Аналогично работе [16] докажем следующие леммы.

Лемма 3

Пусть $(q,u)\in H^{s+1}(a,b)\times H^{s+2}(a,b)$, $s\geq 0$ является точным решением (4–6) и пусть $\phi\in H^{t+2}(a,b)$, $t\geq 0$ является решением двойственной задачи (24–25), а $\Phi=-\phi'$. Также полагаем, что константа C_{11} удовлетворяет (16). Тогда существует константа C такая, что справедлива следующая оценка:

$$A\left(q-\Pi_2 q, u-\Pi_1 u; \Phi-\Pi_2\Phi, \phi-\Pi_1\phi\right)\leq$$
$$\leq Ch^{P_1}\|u\|_{s+2}\|\phi\|_{t+2},$$

где $P_1=\min\left\{\min\{s,k\}+1+\min\{t+1,k\},\ \min\{s+1,k\}+1+\min\{t,k+\alpha\}\right\}$.

Доказательство

Предположим $\xi_q=q-\Pi_2 q$, $\xi_u=u-\Pi_1 u$, $\xi_\Phi=\Phi-\Pi_2\Phi$, $\xi_\phi=\phi-\Pi_1\phi$. Следовательно:

$$A\left(\xi_q,\xi_u;\xi_\Phi,\xi_\phi\right)\leq\left|\int_a^b \xi_q\xi_\Phi dx\right|+$$
$$+\left|\sum_{i=1}^N \xi_{ui}[[\xi_{\Phi i}]]+\sum_{i=1}^N\left[\int_{\Upsilon_i^-}\xi_u\xi_\Phi' dx+\int_{\Upsilon_i^+}\xi_u\xi_\Phi' dx\right]\right|+$$
$$+\left|\sum_{i=0}^N \xi_{qi+1/2}[[\xi_{\phi i+1/2}]]+\sum_{i=1}^N\left[\int_{\Upsilon_i^-}\xi_q\xi_\phi' dx+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{\Upsilon_i^+}\xi_q\xi' dx\right]\right|+\left|\sum_{i=0}^N C_{11}[[\xi_{ui+1/2}]][[\xi_{\phi i+1/2}]]\right|=$$
$$=A_1+A_2+A_3+A_4.$$

Оценим отдельно каждое слагаемое. Из неравенства Коши-Буняковского получим:

$$A_1\leq\sum_{\Upsilon\in T_Q}\left|\int_\Upsilon \xi_q\xi_\Phi dx\right|\leq$$
$$\leq\left(\sum_{\Upsilon\in T_Q}\left\|\xi_q\right\|_{0,\Upsilon}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\Upsilon\in T_Q}\left\|\xi_\Phi\right\|_{0,\Upsilon}^2\right)^{1/2}.$$

Далее из оценок леммы 1 следует:

$$A_1\leq\tilde{C}_1\left(\sum_{\Upsilon\in T_Q}h_\Upsilon^{2\min\{s,k\}+2}\|q\|_{s+1,\Upsilon}^2\right)^{1/2}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{\Upsilon\in T_Q}h_\Upsilon^{2\min\{t,k\}+2}\|\Phi\|_{t+1,\Upsilon}^2\right)^{1/2}.$$

Интегрируя по частям и применяя последовательно неравенство Коши-Буняковского и лемму 1, получим оценку:

$$A_2=\left|\sum_{i=1}^N\xi_{ui}[[\xi_{\Phi i}]]+\sum_{i=1}^N\left(\int_{\Upsilon_i^-}\xi_u\xi_\Phi' dx+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{\Upsilon_i^+}\xi_u\xi_\Phi' dx\right)\right|=\left|\sum_{i=1}^N\xi_{ui}\xi_{\Phi i}^+-\sum_{i=1}^N\xi_{ui}\xi_{\Phi i}^-+\right.$$
$$+\sum_{i=1}^N\left(\xi_{ui}\xi_{\Phi i}^- -\xi_{ui-1/2}^+\xi_{\Phi i-1/2}-\int_{\Upsilon_i^-}\xi_u'\xi_\Phi dx+\right.$$
$$\left.\left.+\xi_{ui+1/2}^-\xi_{\Phi i+1/2}-\xi_{ui}\xi_{\Phi i}^+-\int_{\Upsilon_i^-}\xi_u'\xi_\Phi dx\right)\right|=$$
$$=\left|-\sum_{i=0}^N\xi_{\Phi i+1/2}[[\xi_{ui+1/2}]]-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^N\left(\int_{\Upsilon_i^-}\xi_u'\xi_\Phi dx+\int_{\Upsilon_i^+}\xi_u'\xi_\Phi dx\right)\right|.$$

$$A_2\leq\sum_{\Upsilon\in T_Q}\left(\left|\xi_u\right|_{1,\Upsilon}\left\|\xi_\Phi\right\|_{0,\Upsilon}+\left|\frac{1}{\sqrt{h_\Upsilon}}\xi_u\ |_{\partial\Upsilon}\right|\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left|\sqrt{h_\Upsilon}\xi_\Phi\ |_{\partial\Upsilon}\right|\right)\leq\left(\sum_{\Upsilon\in T_Q}\left(\left|\xi_u\right|_{1,\Upsilon}^2+\frac{1}{h_\Upsilon}\left|\xi_u\ |_{\partial\Upsilon}\right|^2\right)\right)^{1/2}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{\Upsilon\in T_Q}\left(\left|\xi_\Phi\right|_{0,\Upsilon}^2+h_\Upsilon\left|\xi_\Phi\ |_{\partial\Upsilon}\right|^2\right)\right)^{1/2}\leq$$
$$\leq\left(\sum_{\Upsilon\in T_Q}\left(C_1 h_\Upsilon^{2\min\{s+1,k\}}\|u\|_{s+2,\Upsilon}^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+C_2\frac{1}{h_\Upsilon}h_\Upsilon^{2\min\{s+1,k\}+1}\|u\|_{s+2,\Upsilon}^2\right)\right)^{1/2}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{\Upsilon\in T_Q}\left(C_3 h_\Upsilon^{2\min\{t,k\}+2}\|\Phi\|_{t+1,\Upsilon}^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+C_4 h_\Upsilon h_\Upsilon^{2\min\{t,k\}+1}\|\Phi\|_{t+1,\Upsilon}^2\right)\right)^{1/2}\leq$$
$$\leq\tilde{C}_2\left(\sum_{\Upsilon\in T_Q}h_\Upsilon^{2\min\{s+1,k\}}\|u\|_{s+2,\Upsilon}^2\right)^{1/2}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{\Upsilon\in T_Q}h_\Upsilon^{2\min\{t,k\}+2}\|\Phi\|_{t+1,\Upsilon}^2\right)^{1/2}.$$

Аналогично получим:

$$\mathrm{A}_3 = \left| \sum_{i=1}^{N} \xi_{qi+1/2}[[\xi_{\phi i+1/2}]] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\Upsilon_i^-} \xi_q \xi_\phi' dx + \int_{\Upsilon_i^+} \xi_q \xi_\phi' dx \right) \right| \le$$

$$\le \tilde{C}_3 \left(\sum_{\Upsilon \in \mathrm{T}_Q} h_\Upsilon^{2\min\{s,k\}+2} \|q\|_{s+1,\Upsilon}^2 \right)^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{\Upsilon \in \mathrm{T}_Q} h_\Upsilon^{2\min\{t+1,k\}} \|\phi\|_{t+2,\Upsilon}^2 \right)^{1/2} .$$

Применяя правило Коши-Буняковского и лемму 1, получим:

$$\mathrm{A}_4 = \left| \sum_{i=0}^{N} C_{11}[[\xi_{ui+1/2}]][[\xi_{\phi i+1/2}]] \right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{N} \sqrt{C_{11}}[[\xi_{ui+1/2}]] \cdot \sqrt{C_{11}}[[\xi_{\phi i+1/2}]] \le$$

$$\le \left(\sum_{i=0}^{N-1} C_{11} \left| \xi_{ui+1/2}^+ \right|^2 + \sum_{i=1}^{N} C_{11} \left| \xi_{ui+1/2}^- \right|^2 \right)^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{i=0}^{N-1} C_{11} \left| \xi_{\phi i+1/2}^+ \right|^2 + \sum_{i=1}^{N} C_{11} \left| \xi_{\phi i+1/2}^- \right|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{\Upsilon \in \mathrm{T}_Q} C_5 C_{11} h_\Upsilon^{2\min\{s+1,k\}+1} \|u\|_{s+2,\Upsilon}^2 \right)^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{\Upsilon \in \mathrm{T}_Q} C_6 C_{11} h_\Upsilon^{2\min\{t+1,k\}+1} \|\phi\|_{t+2,\Upsilon}^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \tilde{C}_4 \left(\sum_{\Upsilon \in \mathrm{T}_Q} h_\Upsilon^{2\min\{s+1,k\}+1+\square} \|u\|_{s+2,\Upsilon}^2 \right)^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{\Upsilon \in \mathrm{T}_Q} h_\Upsilon^{2\min\{t+1,k\}+1+\square} \|\phi\|_{t+2,\Upsilon}^2 \right)^{1/2} .$$

Сложив полученные неравенства и проведя несложные алгебраические операции, получим:

$$\mathrm{A}\left(\xi_q, \xi_u; \xi_\Phi, \xi_\phi\right) \le \tilde{C}\left(h_\Upsilon^{\min\{s,k\}+1} h_\Upsilon^{\min\{t,k\}+1} + \right.$$

$$h_\Upsilon^{\min\{s+1,k\}} h_\Upsilon^{\min\{t,k\}+1} + h_\Upsilon^{\min\{s,k\}+1} h_\Upsilon^{\min\{t+1,k\}} +$$

$$+ h_\Upsilon^{\min\{s,k\}+1} h_\Upsilon^{\min\{t+1,k\}} +$$

$$\left. + h_\Upsilon^{\min\{s+1,k\}+\frac{1+\alpha}{2}} h_\Upsilon^{\min\{t+1,k\}+\frac{1+\alpha}{2}} \right) \|u\|_{s+2} \|\phi\|_{t+2} \le$$

$$\le \tilde{C}\left(h_\Upsilon^{\min\{s,k\}+1} \left(h_\Upsilon^{\min\{t,k\}+1} + h_\Upsilon^{\min\{t+1,k\}} \right) + \right.$$

$$\left. + h_\Upsilon^{\min\{s+1,k\}+1} \left(h_\Upsilon^{\min\{t,k\}} + h_\Upsilon^{\min\{t+1,k\}+\alpha} \right) \right) \cdot$$

$$\cdot \|u\|_{s+2} \|\phi\|_{t+2} \le$$

$$\le C h^{\min\{\min\{s,k\}+1+\min\{t+1,k\}, \min\{s+1,k\}+1+\min\{t,k+\alpha\}\}} \cdot$$

$$\cdot \|u\|_{s+2} \|\phi\|_{t+2} .$$

Доказательство завершено.

Лемма 4

Пусть Π_1 и Π_2 обозначают $L^2(a,b)-$ проекции на V_h или W_h соответственно. Пусть $(w,v) \in W_h \times V_h$, $(q,u) \in H^{s+1}(a,b) \times H^{s+2}(a,b)$, $s \ge 0$. Полагаем, что коэффициент C_{11} удовлетворяет (16). Тогда существует константа C такая, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\left| \mathrm{A}\left(w, v; q - \Pi_2 q, u - \Pi_1 u\right) \right| \le \\ &\le C h^{P_2} A^{1/2}\left(w, v; w, v\right) \|u\|_{s+2} , \end{aligned} \tag{26}$$

где $P_2 = \min\left\{ s + \frac{1}{2}(1-\alpha), k + \frac{1}{2}(1+\alpha) \right\}$.

Доказательство

Из (21) следует, что

$$\left| \mathrm{A}\left(w, v; w, v\right) \right| = \|w\|_0^2 + \sum_{i=0}^{N} C_{11}[[v_{i+1/2}]]^2 .$$

Возьмем $\xi_q = q - \Pi_2 q$ и $\xi_u = u - \Pi_1 u$, тогда

$$\mathrm{A}\left(w, v; \xi_q, \xi_\phi\right) \le \left| \int_a^b w \xi_q dx \right| +$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^{N} v[[\xi_{qi}]] + \sum_{i=1}^{N} \left[\int_{\Upsilon_i^-} v \xi_q' dx + \int_{\Upsilon_i^+} v \xi_q' dx \right] \right| +$$

$$+\left|\sum_{i=0}^{N} w_{i+1/2}[[\xi_{ui+1/2}]]+\sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\Upsilon_i^-} w\xi_u' dx+\int_{\Upsilon_i^+} w\xi_u' dx\right]\right|+$$
$$+\left|\sum_{i=0}^{N} C_{11}[[v_{i+1/2}]][[\xi_{ui+1/2}]]\right|.$$

Используя тот факт, что Π_2 есть оператор $L^2(a,b)$-проекции для любых $w\in W_h$, получим:

$$\left|\int_a^b w\xi_q dx\right|=\left|\int_a^b w\left(q-\Pi_2 q\right)dx\right|=0.$$

Аналогично, дополнительно интегрируя по частям, получим

$$\left|\sum_{i=1}^{N} v[[\xi_{qi}]]+\sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\Upsilon_i^-} v\xi_q' dx+\int_{\Upsilon_i^+} v\xi_q' dx\right]\right|=$$
$$=\left|-\sum_{i=0}^{N}[[v_{i+1/2}]]\xi_{qi+1/2}\right|.$$

Умножим и разделим на $C_{11}^{1/2}$, применим неравенство Коши-Буняковского, леммы 1 и 2. Получим:

$$\left|\sum_{i=1}^{N} v[[\xi_{qi}]]+\sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\Upsilon_i^-} v\xi_q' dx+\int_{\Upsilon_i^+} v\xi_q' dx\right]\right|\le$$
$$\le\left(\sum_{i=0}^{N} C_{11}[[v_{i+1/2}]]^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{C_{11}}\left|\xi\,|_{x_{i+1/2}}\right|^2\right)^{1/2}\le$$
$$\le\left(\|w\|_0^2+\sum_{i=0}^{N} C_{11}[[v_{i+1/2}]]^2\right)^{1/2}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{\Upsilon\in\mathrm{T}_Q} C\frac{1}{C_{11}}h_\Upsilon^{2\min\{s,k\}+1}\|q\|_{s+1,\Upsilon}^2\right)^{1/2}=$$
$$=\mathrm{A}^{1/2}\left(w,v;w,v\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{\Upsilon\in\mathrm{T}_Q} C\frac{1}{C_{11}}h_\Upsilon^{2\min\{s,k\}+1}\|q\|_{s+1,\Upsilon}^2\right)^{1/2}.$$

Аналогично вычислим оценку:

$$\left|\sum_{i=0}^{N} w_{i+1/2}[[\xi_{ui+1/2}]]+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{N}\left[\int_{\Upsilon_i^-} w\xi_u' dx+\int_{\Upsilon_i^+} w\xi_u' dx\right]\right|\le$$
$$\le\mathrm{A}^{1/2}\left(w,v;w,v\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{\Upsilon\in\mathrm{T}_Q}\frac{1}{C_{11}}Ch_\Upsilon^{2\min\{s+1,k\}+1}\|q\|_{s+2,\Upsilon}^2\right)^{1/2}.$$

И наконец,

$$\left|\sum_{i=0}^{N} C_{11}[[v_{i+1/2}]][[\xi_{ui+1/2}]]\right|\le\left(\sum_{i=0}^{N} C_{11}[[v_{i+1/2}]]^2\right)^{1/2}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{i=0}^{N} C_{11}\left|[[\xi_{ui+1/2}]]\right|^2\right)^{1/2}\le$$
$$\le\left(\|w\|_0^2+\sum_{i=0}^{N} C_{11}[[v_{i+1/2}]]^2\right)^{1/2}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{i=0}^{N-1} C_{11}\left|\xi_{ui+1/2}^{+}\right|^2+\sum_{i=1}^{N} C_{11}\left|\xi_{ui+1/2}^{-}\right|^2\right)^{1/2}\le$$
$$\le\mathrm{A}^{1/2}\left(w,v;w,v\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{\Upsilon\in\mathrm{T}_Q} CC_{11}h_\Upsilon^{2\min\{s+1,k\}+1}\|q\|_{s+2,\Upsilon}^2\right)^{1/2}.$$

Сложив полученные неравенства и проведя некоторые алгебраические операции, получим требуемое неравенство:

$$\mathrm{A}\left(w,v;\xi_q,\xi_\phi\right)\le\mathrm{A}^{1/2}\left(w,v;w,v\right)\cdot$$
$$\cdot\left[\left(\sum_{\Upsilon\in\mathrm{T}_Q} C\frac{1}{C_{11}}h_\Upsilon^{2\min\{s,k\}+1}\|q\|_{s+1,\Upsilon}^2\right)^{1/2}+\right.$$
$$+\left(\sum_{\Upsilon\in\mathrm{T}_Q}\frac{1}{C_{11}}Ch_\Upsilon^{2\min\{s+1,k\}+1}\|q\|_{s+2,\Upsilon}^2\right)^{1/2}+$$
$$\left.+\left(\sum_{\Upsilon\in\mathrm{T}_Q} CC_{11}h_\Upsilon^{2\min\{s+1,k\}+1}\|q\|_{s+2,\Upsilon}^2\right)^{1/2}\right]\le$$
$$\le Ch^{\min\left\{s+\frac{1}{2}(1-\alpha),k+\frac{1}{2}(1+\alpha)\right\}+1}\mathrm{A}^{1/2}\left(w,v;w,v\right)\|u\|_{s+2}.$$

Доказательство завершено.

Ошибку аппроксимации проекции (19–20) обозначим $(e_q, e_u) = (q - \tilde{q}_h, u - \tilde{u}_h)$, где (q, u) и $(\tilde{q}_h, \tilde{u}_h)$ – решения задач (4–6) и (19–20) соответственно.

Далее, следуя методу Обэна-Нитше [16], рассмотрим следующую задачу:

$$\mathrm{A}\left(w, v; \Phi, \phi\right) = \Lambda(v)\,, \qquad (27)$$

где ϕ – искомое слабое решение задачи (24)-(25), $\Phi = -\phi'$; (w,v), $(\Phi,\phi) \in H^{t+1}((a,b)) \times H^{t+2}((a,b))$, $t \ge 0$, $\Lambda(v) = (v, \lambda)$.

Тогда L^2-норму ошибки аппроксимации e_u можно определить следующим образом:

$$\|e_u\|_0 = \sup_{\lambda \in C_0^\infty(a,b)} \frac{|\Lambda(e_u)|}{\|\lambda\|_0}\,, \qquad (28)$$

Пусть $(w, v) = (e_q, e_u)$, тогда (27) запишем в виде:

$$\Lambda(e_u) = \mathrm{A}\left(e_q, e_u; \Phi, \phi\right).$$

Далее, учитывая условие согласованности потоков (9)-(10), легко показать, что

$$\mathrm{A}\left(e_q, e_u; w, v\right) = 0\,,\ \forall (w,v) \in W_h \times V_h\,. \qquad (29)$$

Следовательно, $\mathrm{A}\left(e_q, e_u; \Pi_2\Phi, \Pi_1\phi\right) = 0$, где Π_1, Π_2 – проекторы на пространства V_h, W_h соответственно. Из этого следует:

$$\begin{aligned}\Lambda(e_u) &= \mathrm{A}\left(e_q, e_u; \Phi - \Pi_2\Phi, \phi - \Pi_1\phi\right) = \\ &= \mathrm{A}\left(\Pi_2 e_q, \Pi_1 e_u; \Phi - \Pi_2\Phi, \phi - \Pi_1\phi\right) + \\ &+ \mathrm{A}\left(q - \Pi_2 q, u - \Pi_1 u; \Phi - \Pi_2\Phi, \phi - \Pi_1\phi\right).\end{aligned}$$

Поскольку $(\Pi_2 e_q, \Pi_1 e_u) \in W_h \times V_h$, то, применяя лемму (4), получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned}&\left|\mathrm{A}\left(\Pi_2 e_q, \Pi_1 e_u; \Phi - \Pi_2\Phi, \phi - \Pi_1\phi\right)\right| \le \\ &\le Ch^{P_2'} \mathrm{A}^{1/2}\left(\Pi_2 e_q, \Pi_1 e_u; \Pi_2 e_q, \Pi_1 e_u\right)\|\phi\|_{t+2}\,,\end{aligned} \qquad (30)$$

где $P_2' = \min\left\{t + \frac{1}{2}(1-\alpha), k + \frac{1}{2}(1+\alpha)\right\}$.

Учитывая (29) и то, что $\Pi_2 \tilde{q}_h = \tilde{q}_h$, $\Pi_1 \tilde{u}_h = \tilde{u}_h$, получим:

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}\left(\Pi_2 e_q, \Pi_1 e_u; \Pi_2 e_q, \Pi_1 e_u\right) = \\ &= \mathrm{A}\left(\Pi_2 q - e_q, \Pi_1 u - e_u; \Pi_2 e_q, \Pi_1 e_u\right) = \\ &= \mathrm{A}\left(\Pi_2 q - \Pi_2\tilde{q}_h - q + \tilde{q}_h, \Pi_1 u - \right. \\ &\left. - \Pi_1\tilde{u}_h - u + \tilde{u}_h; \Pi_2 e_q, \Pi_1 e_u\right) = \qquad (31) \\ &= \mathrm{A}\left(\Pi_2 q - q, \Pi_1 u - u; \Pi_2 e_q, \Pi_1 e_u\right) = \\ &= \mathrm{A}\left(-\Pi_2 e_q, \Pi_1 e_u; q - \Pi_2 q, \Pi_1 u - u\right) \le \\ &\le Ch^{P_2} \mathrm{A}^{1/2}\left(\Pi_2 e_q, \Pi_1 e_u; \Pi_2 e_q, \Pi_1 e_u\right)\|u\|_{s+2}\end{aligned}$$

где $P_2 = \min\left\{s + \frac{1}{2}(1-\alpha), k + \frac{1}{2}(1+\alpha)\right\}$.

Тогда из (30–31) и леммы 3 получим:

$$|\Lambda(e_u)| \le Ch^{P_2 + P_2'}\|u\|_{s+2}\|\phi\|_{t+2} + Ch^{P_1}\|u\|_{s+2}\|\phi\|_{t+2}\,,$$

где $P_1 = \min\{\min\{s,k\} + 1 + \min\{t+1, k\}, \min\{s+1, k\} + 1 + \min\{t, k+\alpha\}\}$.

Далее, учитывая, что ϕ является решением задачи (24)-(25), можем считать, что для ϕ справедливо свойство эллиптической регулярности $\|\phi\|_2 \le C\|\lambda\|_0$.

Следовательно, приняв $t = 0$, из (28) получим оценку:

$$\|u - \tilde{u}_h\|_0 \le Ch^D\|u\|_{s+2}\,, \qquad (32)$$

где

$$\begin{aligned}D = \min\Big\{&\min\left\{s + \frac{1}{2}(1-\alpha), k + \frac{1}{2}(1+\alpha)\right\} + \\ &+ \min\left\{\frac{1}{2}(1-\alpha), k + \frac{1}{2}(1+\alpha)\right\}, \min\{\min\{s,k\} + \\ &1 + \min\{1,k\}, \min\{s+1,k\} + 1 + \min\{0, k+\alpha\}\}\Big\},\end{aligned}$$

$$-1 \le \alpha \le 0\,.$$

Далее продифференцируем (19–20) по времени t. Путем аналогичных рассуждений получим следующую оценку:

$$\left\|u_t-\tilde{u}_{ht}\right\|_0 \le Ch^D\left(\|u\|_{s+2}+\|u_t\|_{s+2}\right), \quad (33)$$

где

$$D=\min\left\{\min\left\{s+\frac{1}{2}(1-\alpha),k+\frac{1}{2}(1+\alpha)\right\}+\right.$$
$$+\min\left\{\frac{1}{2}(1-\alpha),k+\frac{1}{2}(1+\alpha)\right\},\min\left\{\min\{s,k\}+\right.$$
$$\left.\left.1+\min\{1,k\},\min\{s+1,k\}+1+\min\{0,k+\alpha\}\right\}\right\},$$
$$-1\le\alpha\le 0\ .$$

Используя определенную ранее проекцию, запишем:

$$u-u_h=\left(u-\tilde{u}_h\right)-\left(u_h-\tilde{u}_h\right)=\eta_u-\xi_u\,,$$

$$q-q_h=\left(q-\tilde{q}_h\right)-\left(q_h-\tilde{q}_h\right)=\eta_q-\xi_q\,.$$

Используя неравенство треугольника для искомой оценки, запишем утверждение

$$\left\|u-u_h\right\|_0\le\left\|u-\tilde{u}_h\right\|_0-\left\|u_h-\tilde{u}_h\right\|_0. \quad (34)$$

Используя проекцию (19–20), перепишем систему (17–18) в следующем виде:

$$\int_a^b\xi_h w dx+\sum_{i=1}^N\xi_{ui}[[w_i]]+$$
$$+\sum_{i=1}^N\left[\int_{\Upsilon_i^-}\xi_u w'dx+\int_{\Upsilon_i^+}\xi_u w'dx\right]=0, \quad (35)$$

$$\int_a^b\xi_{ut}v dx+\sum_{i=0}^N\xi_{qi+1/2}[[v_{i+1/2}]]+$$
$$+\sum_{i=1}^N\left[\int_{\Upsilon_i^-}\xi_q v'dx+\int_{\Upsilon_i^+}\xi_q v'dx\right]+ \quad (36)$$
$$+\sum_{i=0}^N C_{11}[[\xi_{ui+1/2}]][[v_{i+1/2}]]=\int_a^b\eta_{ut}v dx,$$

Лемма 5

Существует константа C, не зависящая от h и k, – такая, что справедлива следующая оценка:

$$\left\|\xi_u\right\|^2+2\int_0^t\left\{\int_a^b\xi_q^2dx+\sum_{i=0}^N C_{11}[[\xi_{ui+1/2}]]^2\right\}ds\le$$
$$\le C\left(\left\|\xi_u(0)\right\|+\int_0^t\left\|\eta_{ut}\right\|^2ds\right). \quad (37)$$

Доказательство

Подставим $w=\xi_q$ в (35), $v=\xi_u$ в (36) и сложим. Получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\xi_u\right\|^2+\int_a^b\xi_q^2dx+\sum_{i=0}^N C_{11}[[\xi_{ui+1/2}]]^2\le$$
$$\le\int_a^b\eta_{ut}\xi_u dx. \quad (38)$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим:

$$\frac{d}{dt}\left\|\xi_u\right\|^2+2\int_a^b\xi_q^2dx+2\sum_{i=0}^N C_{11}[[\xi_{ui+1/2}]]^2\le$$
$$\le\left\|\eta_{ut}\right\|^2+\left\|\xi_u\right\|^2. \quad (39)$$

Далее проинтегрируем от 0 до t и получим:

$$\left\|\xi_u\right\|^2+2\int_0^t\left\{\int_a^b\xi_q^2dx+\sum_{i=0}^N C_{11}[[\xi_{ui+1/2}]]^2\right\}ds\le$$
$$\le\left\|\xi_u(0)\right\|+\int_0^t\left\|\eta_{ut}\right\|^2ds+\int_0^t\left\|\xi_u\right\|^2ds. \quad (40)$$

Используем лемму Гроноулла, получим искомую оценку.

Доказательство завершено.

Таким образом, из (32), (33), (34) и (37) следует

Теорема 1

Пусть $(q,u)\in H^{s+1}\times H^{s+2}$, $s\ge 0$ является решением задачи (4–6) и $(q_h,u_h)\in W_h\times V_h$ является решением задачи (17–18). Пусть выполнены предположения из лемм 3 и 4. Тогда справедлива оценка:

$$\|u-u_h\|_0 \le$$
$$\le Ch^D\left(\|u\|_{s+2}+\int_0^t\left\{\|u(\tau)\|_{s+2}+\|u_\tau(\tau)\|_{s+2}\right\}d\tau\right), \quad (41)$$

где

$$D=\min\left\{\min\left\{s+\frac{1}{2}(1-\alpha),k+\frac{1}{2}(1+\alpha)\right\}+\right.$$
$$+\min\left\{\frac{1}{2}(1-\alpha),k+\frac{1}{2}(1+\alpha)\right\},\min\left\{\min\left\{s,k\right\}+\right.$$
$$\left.\left.1+\min\left\{1,k\right\},\min\left\{s+1,k\right\}+1+\min\left\{0,k+\alpha\right\}\right\}\right\},$$
$$-1\le\alpha\le 0\cdot$$

Обсуждение и заключения

В работе приводятся оценки погрешности для решения одномерной краевой задачи для параболического уравнения, полученного методом Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных равномерных сетках. При этом предполагалось, что узлы двойственной сетки являются центрами ячеек основной сетки.

Ниже приведена таблица, в которой представлены порядки сходимости по h с различным выбором стабилизирующего параметра C_{11}. Эти порядки легко получаются из (41).

Таблица

Table

Порядки сходимости решения $u \in H^{s+2}$ для $s \ge 0$ и $k \ge 1$

Order of convergence of the solution $u \in H^{s+2}$ for $s \ge 0$ and $k \ge 1$

	C_{11}	D
$\alpha=0$	$O(1)$	$\min\{s,k\}+1$
$\alpha=-1$	$O(1/h)$	$\min\{s+1,k\}+1$

Как видно из таблицы, получаются порядки сходимости $k+1$ для исследуемого метода, где k – максимальный порядок используемых полиномов в базисных функциях. При этом в данном подходе, в отличие от традиционного подхода с использованием одной сетки, проще и нагляднее вычисляются численные потоки на границе элементов за счет использования разнесенных сеток.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Масягин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф.** О применении разрывного конечно-элементного метода Галеркина для решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных сетках // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15, № 2. С. 59–65. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=19832783

2. Об одном способе решения уравнений диффузионного типа с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированной сетке / Р. В. Жалнин [и др.] // Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16, № 2. С. 7–13. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=23570368

3. Решение трехмерных уравнений теплопроводности с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках / Р. В. Жалнин [и др.] // Вестник Самарского государственного технического университета (Сер. «Физико-математические науки»). 2015. Т. 19, № 3. С. 523–533. DOI: 10.14498/vsgtu1351

4. Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках / Р. В. Жалнин [и др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 6. С. 989–998. DOI: 10.7868/S0044466916060247

5. Применение разрывного метода Галеркина для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках / Р. В. Жалнин [и др.] // Вестник Южно-Уральского государственного университета. (Сер. «Математическое моделирование и программирование»). 2016. Т. 9, № 3. С. 144–151. DOI: 10.14529/mmp160313

6. **Cockburn B., Shu C. W.** The local discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion systems // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1998. Vol. 35, no. 6. P. 2440–2463. DOI: 10.1137/S0036142997316712

7. **Cockburn B., Dawson C.** Some extensions of the local discontinuous Galerkin method for convection-diffusion equations in multidimensions // Tech. Report 99-27. Texas Institute for Computational and Applied Mathematics. 1999. DOI: 10.1.1.26.7688

8. An optimal a priory error estimate for the hp-version of the local discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems / P. Castillo [et al.] // IMA Research Report 1689. University of Minnesota, 2000. URL: https://www.ima.umn.edu/sites/default/files/1689.pdf

9. **Babuška I., Zlaman M.** Nonconforming elements in the finite element method with penalty // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1973. Vol. 10, no. 5. P. 863–875. DOI: 10.1137/0710071

10. **Douglas J., Dupont T.** Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods // Lecture Notes in Physics. 1976. Vol. 58. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0120591

11. **Baker G. A.** Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements // Math. Comp. 1977. Vol. 31. P. 45–59. DOI: 10.1090/S0025-5718-1977-0431742-5

12. **Wheeler M. F.** An elliptic collocation-finite element method with interior penalties // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1978. Vol 15, no. 1. P. 152–161. DOI: 10.1137/0715010

13. **Rusten T., Vassilevski P. S., Winther R.** Interior penalty preconditioners for mixed finite element approximations of elliptic problems // Math. Comp. 1996. Vol. 65. P. 447–466. DOI: 10.1090/S0025-5718-96-00720-X

14. **Becker R., Hansbo P.** A finite element method for domain decomposition with non-matching grids // Tech. Report 3613, INRIA. 1999. URL: https://hal.inria.fr/inria-00073065/document

15. **Даутов Р. З., Федотов Е. М.** Абстрактная теория HDG-схем для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 3. С. 463–480. DOI: 10.7868/S0044466914030041

16. An a priory error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems / P. Castillo [et al.] // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2003. Vol. 38, no. 5. P. 1676–1706. DOI: 10.1137/S0036142900371003

Поступила 24.08.2017; принята к публикации 28.09.2017; опубликована онлайн 19.12.2017

Об авторах:

Жалнин Руслан Викторович, заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ведущий научный сотрудник, факультет математики и информационных технологий, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, **ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1103-3321**, zhrv@mrsu.ru

Масягин Виктор Федорович, старший научный сотрудник, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, факультет математики и информационных технологий, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, **ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6738-8183**, vmasyagin@gmail.com

Пескова Елизавета Евгеньевна, младший научный сотрудник, старший преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, факультет математики и информационных технологий, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), e.e.peskova@mail.ru

Вклад соавторов:

Р. В. Жалнин: формулировка и постановка задачи, формулировка и доказательство Леммы 3 и Теоремы 1; В. Ф. Масягин: формулировка и доказательство Леммы 4 и 5; Е. Е. Пескова: обзор литературы по зарубежным источникам.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

REFERENCES

1. Zhalnin R. V., Masyagin V. F., Tishkin V. F. Discontinuous finite-element Galerkin method for numerical solution of two-dimensional diffusion problems on unstructured grids. *Zhurnal Srenevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* = Journal of Middle-Volga Mathematical Society. 2013; 2(15):59–65. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=19832783 (In Russ.)

2. Zhalnin R. V. , Ladonkina M. E., Masyagin V. F., Tishkin V. F. Discontinuous finite-element Galerkin method for numerical solution of two-dimensional diffusion problems on unstructured grids. *Zhurnal Srenevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* = Journal of Middle-Volga Mathematical Society. 2014; 2(16):7–13. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=23570368 (In Russ.)

3. Zhalnin R. V., Ladonkina M. E., Masyagin V. F., Tishkin V. F. Solution of 3D heat conduction equations using the discontinuous Galerkin method on unstructured grids. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta: Fiziko-matematicheskiye nauki* = Samara State Technical University Bulletin: Physics and Mathematics. 2015. 3(19):523–533. DOI: 10.14498/vsgtu1351 (In Russ.)

4. Zhalnin R. V., Ladonkina M. E., Masyagin V. F., et al. Solving the problem of non-stationary filtration of substance by the discontinuous Galerkin method on unstructured grids. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki* = Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2016; 56(6):977–986. DOI:10.1134/S0965542516060245

5. Zhalnin R. V., Ladonkina M. E., Masyagin V. F., Tishkin V. F. Discontinuous Finite-Element Galerkin Method for Numerical Solution of Parabolic Problems in Anisotropic Media on Triangle Grids. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta: Matematicheskoye modelirovaniye i programmirovaniye* = South Ural State University Bulletin: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2016; 9(3):144–151. DOI: 10.14529/mmp160313 (In Russ.)

6. Cockburn B., Shu C. W. The local discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion systems. SIAM Journal on Numerical Analysis. 1998; 35(6):2440–2463. DOI: 10.1137/S0036142997316712

7. Cockburn B., Dawson C. Some extensions of the local discontinuous Galerkin method for convection-diffusion equations in multidimensions. Tech. Report 99-27, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, 1999. DOI: 10.1.1.26.7688

8. Castillo P., Cockburn B., Schötzau D., Schwab Ch. An optimal a priory error estimate for the hp-version of the local discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems. IMA Research Report 1689. University of Minnesota, 2000. Available at: https://www.ima.umn.edu/sites/default/files/1689.pdf

9. Babuška I., Zlaman M. Nonconforming elements in the finite element method with penalty. SIAM Journal on Numerical Analysis. 1973; 10(5):863–875. DOI: 10.1137/0710071

10. Douglas J., Dupont T. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods. Lecture Notes in Physics. 1976; 58. Available at: https://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0120591

11. Baker GA. Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements. Math. Comp. 1977; 31:45–59. DOI: 10.1090/S0025-5718-1977-0431742-5

12. Wheeler M. F. An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. SIAM Journal on Numerical Analysis. 1978; 15(1):152–161. DOI: 10.1137/0715010

13. Rusten T., Vassilevski P. S., Winther R. Interior penalty preconditioners for mixed finite element approximations of elliptic problems. Math. Comp. 1996; 65:447–466. DOI: 10.1090/S0025-5718-96-00720-X

14. Becker R., Hansbo P. A finite element method for domain decomposition with non-matching grids. Tech. Report 3613, INRIA. 1999. Available at: https://hal.inria.fr/inria-00073065/document

15. Dautov R. Z., Fedotov E. M. Abstract theory of hybridizable discontinuous Galerkin methods for second-order quasilinear elliptic problems. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki* = Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014; 54(3):474–490. DOI: 10.1134/S096554251403004X

16. Castillo P., Cockburn B., Perugia I., Schötzau D. An a priory error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems. SIAM Journal on Numerical Analysis. 2003; 38(5):1676–1706. DOI: 10.1137/S0036142900371003

Submitted 24.08.2017; revised 28.09.2017; published online 19.12.2017

About the authors:

Ruslan V. Zhalnin, Head of Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), **ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1103-3321**, zhrv@mrsu.ru

Viktor F. Masyagin, Associate Professor of Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), **ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6738-8183**, vmasyagin@gmail.com

Yelizaveta Ye. Peskova, Senior Lecturer of Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), e.e.peskova@mail.ru

Contribution of the co-authors:

R. V. Zhalnin: formulated the problem, formulated and proved the Lemma 3 and Theorem 1; V. F. Masyagin formulated and proved the Lemma 4 and Lemma 5; Ye. Ye. Peskova reviewed the literature.

All authors have read and approved the final version of the manuscript.