http://vestnik.mrsu.ru ISSN Print 0236-2910
ISSN Online 2313-0636

УДК 518.9 DOI: 10.15507/0236-2910.027.201702.239-249

КООПЕРАТИВНЫЙ ВАРИАНТ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДВУМЯ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЯМИ И ОДНИМ УБЕГАЮЩИМ. СИЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МНОЖЕСТВА ДЕЛЕЖЕЙ

В. Д. Ширяев, Р. Р. Бикмурзина*
ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия)
**bravilya@mail.ru*

Введение. В статье анализируется простая дифференциальная игра на плоскости преследования двумя согласованно действующими игроками $P = \{P_1, P_2\}$ одного убегающего игрока *E*; игра рассматривается в форме характеристической функции. Показывается динамическая устойчивость принципа оптимальности.
Материалы и методы. Для решения поставленной задачи используются геометрические конструкции и методы. Граница безопасности преследуемого игрока определяется с помощью окружности Аполлония, наряд преследователей использует стратегию параллельного сближения.
Результаты исследования. Предлагается метод нахождения оптимальных стратегий игроков, а также оптимальные траектории их движения. Приводится способ построения характеристической функции, а в качестве решения рассматривается все множество дележей. Однако использование результатов кооперативной теории в дифференциальных играх невозможно без решения проблем, связанных со спецификой дифференциальных уравнений движения (в первую очередь, проблемы динамической устойчивости принципов оптимальности). В связи с этим вводится вспомогательная функция, осуществляющая перераспределение выигрыша игрока во времени с сохранением его суммарного выигрыша в игре. С помощью данной функции определяется динамическая устойчивость кооперативного решения и показывается сильная динамическая устойчивость всего множества решений.
Обсуждение и заключения. Полученные результаты согласуются с аналогичными исследованиями других авторов. Дальнейшие работы в данном направлении могут использоваться при разработке методов «регуляризации» принципов оптимальности, для которых всегда выполняется условие динамической устойчивости.

Ключевые слова: простое движение, окружность Аполлония, коалиция, характеристическая функция, дележ, слабая устойчивость решения, сильная устойчивость решения

Для цитирования: Ширяев В. Д., Бикмурзина Р. Р. Кооперативный вариант игры преследования с двумя преследователями и одним убегающим: сильная устойчивость множества дележей // Вестник Мордовского университета. 2017. Т. 27, № 2. С. 239–249. DOI: 10.15507/0236-2910.027.201702.239-249

COOPERATIVE OPTION OF PURSUIT GAME WITH TWO PURSUERS AND ONE EVADER. A STRONG STABILITY OF DIVISION VARIETY

V. D. Shiryayev, R. R. Bikmurzina*
National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)
**bravilya@mail.ru*

Introduction. The article deals with a simple differential game on the plane of pursuit with two consistently active players and one evader E; the game is considered in the form of the characteristic function.
Materials and Methods. The geometric constructions and methods are used for solving the problem. The security zone of the escapee is bounded by the Apollonius circle, the pursuit team uses a strategy of parallel approach.
Results. A method of finding the optimal players strategies and the optimal players' trajectory is proposed. The way of forming the characteristic function is provided. All the variety of division is considered as a solution. However, the use of the results of cooperative theory of differential games is impossible without solving the problems associated with the specifics of differential equations of motion. Foremost, it is the problem of dynamic stability of optimality principles. The article introduces an auxiliary function of making the redistribution of winnings in time, keeping his total winnings throughout the game. The dynamic stability of the cooperative solution is determined with the help of this function. Strong dynamic stability of the entire set of solutions is shown.
Discussion and Conclusions. The obtained results are consistent with similar research of other authors. Further research in this field can be used in the development of methods for "regularization" of optimality principles, for which the condition of dynamic stability is always fulfilled.

Keywords: simple movement, Apollonius circle, coalition, characteristic function, division, weak stability of the solution, strong stability of the solution

For citation: Shiryayev V. D., Bikmurzina R. R. Cooperative option of pursuit game with two pursuers and one evader. A strong stability of division variety. *Vestnik Mordovskogo universiteta* = Mordovia University Bulletin. 2017; 27(2):239-249. DOI: 10.15507/0236-2910.027.201702.239-249

Введение

Задачи преследования являются типичными примерами дифференциальных игр. Задачи преследования с простым движением стали базовыми для современной теории дифференциальных игр. Несмотря на внешнюю простоту постановки, многие из них в настоящее время представляют собой серьезные математические проблемы.

Естественным подходом к изучению игр простого преследования является рассмотрение данных задач как кооперативных дифференциальных игр. В этом случае особую роль играет концепция динамической устойчивости (состоятельности во времени). Нарушение динамической устойчивости принципа оптимальности приводит к возможности отклонения от первоначально выбранной схемы оптимального поведения и к нарушению устойчивости процесса в целом.

В статье рассматривается случай преследования двумя согласованно действующими игроками $P=\{P_1,P_2\}$ одного убегающего игрока E; игра $\Gamma\left(2,1;\{P_1,P_2\},E\right)$. Игроки перемещаются на плоскости с постоянными скоростями, имея возможность в каждый момент времени изменять направление своего движения (простое движение [1–2]). Преследуемый E считается пойманным, как только найдется такое $i\in\{1,2\}$, что местоположения P_i и E в некоторый момент совпадают.

Будем предполагать, что в каждый момент времени наряд преследователей $P=\{P_1,P_2\}$ имеет информацию о своем местоположении, местоположении игрока E и направлении скорости игрока E. Преследуемый E имеет информацию о своем местоположении и местоположении наряда преследователей P. Кроме того, в каждый момент времени игроки могут выбирать направление своего движения или направление вектора скорости (величина скорости постоянна и равна u_i для $P_i \in P$ и v для E) ; $u_i > v$, $i=1,2$, в остальном скорости игроков произвольны.

Выигрыш E определяется как время встречи с первым из преследующих игроков, умноженное на количество преследующих игроков. Выигрыш $P=\{P_1,P_2\}$ определяется как величина выигрыша E с обратным знаком.

Обзор литературы

Задачам преследования с простым движением посвящен ряд работ [1–5]. Определение лучших способов преследования и убегания, выяснение возможности встречи – вот основные вопросы, которые рассматривались в этих работах. При исследовании дифференциальных игр простого преследования часто используется методология кооперативной теории игр [4–7]. Вопрос в этом случае осложняется тем, что в данных задачах необходимо исследовать динамическую устойчивость принципа оптимальности.

Впервые проблема динамической устойчивости решений в дифференциальных играх была выявлена Л. А. Петросяном [6; 8–9]. Исследователем было предложено несколько подходов к преодолению проблемы динамической неустойчивости, заключающихся в определенной «регуляризации» принципов оптимальности, заимствованных из статической теории игр [7; 10–12]. Интерес к указанным вопросам проявился также у западных исследователей, в работах которых проблема получила название «time-consistency problem» (проблема состоятельности во времени) [13–14]. Отдельного внимания заслуживает исследование F. E. Kidland, E. C. Prescott [15]. Следует отметить, что в упомянутой работе не было предложено способов преодоления проблемы несостоятельности во времени, что крайне важно для экономических и других приложений.

Материалы и методы

В статье был предложен метод нахождения оптимальных стратегий игроков с использованием геометрического подхода. В качестве такой стратегии для наряда преследователей была выбрана стратегия параллельного сближения (Π-стратегия). При переходе к рассмотрению исследуемой игры простого преследования как кооперативной дифференциальной игры использовался минимаксный метод построения характеристической функции.

Результаты исследования

Рассмотрим игру $\Gamma\left(2,1;\{P_1,P_2\},E\right)$. Будем говорить, что решение игры $\Gamma\left(2,1;\{P_1,P_2\},E\right)$ = $\Gamma(2,1)$ сводится к решению игры $\Gamma(1,1)$, если оптимальное время преследования в игре $\Gamma(2,1)$ совпадает с оптимальным временем преследования в одной из игр $\Gamma(P_1,E)$ или $\Gamma(P_2,E)$, т. е. для обеспечения встречи за оптимальное время наличие в наряде $P=\{P_1,P_2\}$ одного из преследователей является излишним.

Будем говорить, что наряд применяет Π-стратегию, если каждый преследователь P_i из наряда P применяет Π-стратегию [1–2].

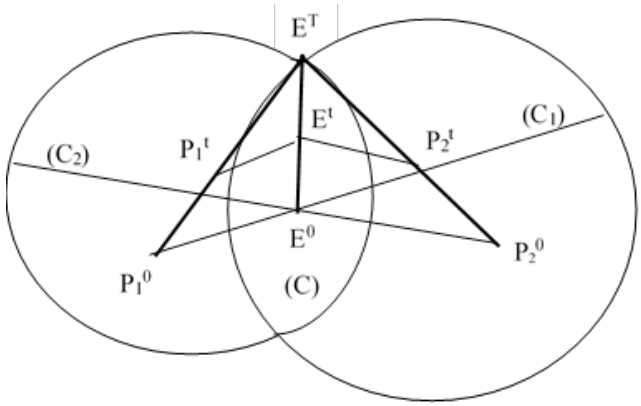
Предположим, что выигрыши трансферабельны для игроков P_1 и P_2. Принимая во внимание, что в коалиции могут вступать только игроки P_1 и P_2, вычислим значения характеристической функции:

$$\bar{v}\left(P_1;t_0,x_0\right)=val\ \Gamma\left(1,1;P_1^0,E^0\right)=-\frac{\rho\left(P_1^0,E^0\right)}{u_1-v}\ \triangleq\ -\frac{\alpha_{11}}{u_1-v},$$

$$\bar{v}\left(P_1;t_0,x_0\right)=val\ \Gamma\left(1,1;P_2^0,E^0\right)=-\frac{\rho\left(P_2^0,E^0\right)}{u_2-v}\ \triangleq\ -\frac{\alpha_{21}}{u_2-v},$$

$$\bar{v}\left(\{P_1,P_2\};t_0,x_0\right)=val\ \Gamma\left(2,1;\{P_1^0,P_2^0\},E^0\right).$$

Решение игры $\Gamma\left(2,1;\{P_1^0,P_2^0\},E^0\right)$ имеет следующий вид [1–3] (см. рис. 1): игрок E движется в точку E^T: $\rho\left(E^0,E^T\right)=\max\limits_{E^t\in(C)}\rho\left(E^0,E^t\right)$, а (C) представляет собой пересечение кругов Аполлония (C_1) и (C_2) в играх между P_1 и E и P_2 и E. Следовательно, $\bar{v}\left(\{P_1,P_2\};t_0,x_0\right)=-2T$. Таким образом, оптимальной для наряда $P=\{P_1,P_2\}$ является $П$-стратегия, оптимальным для E – движение по полупрямой $\left[E^0E^T\right]$.



Р и с. 1. Оптимальные стратегии игроков P_1, P_2 и E

F i g. 1. Optimal strategies of players P_1, P_2 and E

Чтобы игра имела содержательный смысл, сделаем некоторые предположения:

а) $\max\left\{\dfrac{\rho\left(P_1^0,E^0\right)}{u_1-v},\dfrac{\rho\left(P_2^0,E^0\right)}{u_2-v}\right\}\le 2T;$

б) в дальнейшем будем рассматривать только те начальные местоположения P_1^0, P_2^0, E^0, для которых $(C)\ne\varnothing$, $(C_1)\not\subset(C_2)$, $(C_2)\not\subset(C_1)$.

Под решением будем понимать все множество дележей

$$M\left(t_0,x_0\right)=\left\{\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\,\middle|\,\alpha_i\ge\bar{v}\left(P_i;t_0,x_0\right),\ \ i=1,2,\ \ \alpha_1+\alpha_2=\bar{v}\left(\{P_1,P_2\};t_0,x_0\right)\right\}.$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1\ge-\frac{\alpha_{11}}{u_1-v}\\&\alpha_2\ge-\frac{\alpha_{21}}{u_2-v}\\&\alpha_1+\alpha_2=-2T\end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Чтобы не иметь дела с отрицательными числами, вместо системы (1) будем рассматривать систему

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 \le \frac{\alpha_{11}}{u_1 - v}, \\ &\alpha_2 \le \frac{\alpha_{21}}{u_2 - v}, \\ &\alpha_1 + \alpha_2 = 2T \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Поскольку $\frac{\alpha_{11}}{u_1 - v} + \frac{\alpha_{21}}{u_2 - v} \ge 2T$, множество решений системы (2) не является пустым $(t_0 = 0)$.

Оптимальные траектории игроков показаны на рис. 1.

В случае дифференциальной игры характеристическая функция, заданная на семействе всех подмножеств множества игроков, зависит от времени. Это приводит к изменению решения кооперативной дифференциальной игры в каждый момент времени. В связи с этим логично поставить вопрос об устойчивости рассматриваемых решений [6; 8; 16–17].

Пусть $E\left(T-t,\bar{x}(t)\right)$ – множество дележей в игре $\Gamma\left(T-t,\bar{x}(t)\right)$, $t \in [t_0, T]$. Под решением кооперативной дифференциальной игры $\Gamma\left(T-t,\bar{x}(t)\right)$ понимается некоторое подмножество $M\left(T-t,\bar{x}(t)\right) \subset E\left(T-t,\bar{x}(t)\right)$, $t \in [t_0, T]$, где $\bar{x}(t)$ – оптимальная траектория движения игроков в рассматриваемой игре [5–6; 9].

Дележ $\alpha \in M(T-t_0, x_0)$ будем называть *слабо (сильно) устойчивым* в кооперативной дифференциальной игре $\Gamma(T-t_0, x_0)$ с трансферабельными выигрышами, если существует интегрируемая на $[t_0, T]$ вектор-функция $\beta(\tau)$ и такая вектор-функция $\alpha(t)$,

$$\alpha_i(t) = \int_{t_0}^{t} \beta_i(\tau) h_i\left(\bar{x}(\tau)\right) d\tau, \qquad (3)$$

что дележ α представим в виде $\alpha = \alpha(t)$ и для всех $t \in [t_0, T]$ существует такое подмножество $M'\left(T-t,\bar{x}(t)\right)$ множества $M\left(T-t,\bar{x}(t)\right)$, что

$$\alpha(T) \in \left\{\alpha(t) + M'\left(T-t,\bar{x}(t)\right)\right\} \subset M(T-t_0, x_0)$$

$$\left(\alpha(T) \in \left\{\alpha(t) + M\left(T-t,\bar{x}(t)\right)\right\} \subset M(T-t_0, x_0)\right).$$

Решение $M(T-t_0, x_0)$ называется слабо (сильно) устойчивым, если слабо (сильно) устойчивы все входящие в него дележи [4–5;7;10].

Покажем, что все множество дележей рассматриваемой игры сильно устойчиво, т. е. множество решений системы

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1^t \le -\bar{v}\left(P_1; t, \bar{x}(t)\right), \\ &\alpha_2^t \le -\bar{v}\left(P_2; t, \bar{x}(t)\right), \\ &\alpha_1^t + \alpha_2^t = -\bar{v}\left(\{P_1, P_2\}; t, \bar{x}(t)\right) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

не является пустым, и для каждого $\alpha \in M(t_0, x_0)$

$$\alpha_i = \alpha_i(T) = \int_{t_0}^{T} \beta_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2,$$

$$\alpha(T) \in \left\{\alpha(t) + M\left(t,\bar{x}(t)\right)\right\} \subset M(t_0, x_0). \qquad (5)$$

Вычислим значения характеристической функции в момент t, $t \in [t_0, T]$: :

$$\bar{v}\left(P_i; t, \bar{x}(t)\right) = -\frac{\rho\left(P_i^t, E^t\right)}{u_i - v}, \; i = 1, 2;$$

$$\bar{v}\left(\{P_1, P_2\}; t, \bar{x}(t)\right) = -2(T-t).$$

Из заданного подобия треугольников $\Delta\, P_i^0 E^0 E^T$ и $\Delta\, P_i^t E^t E^T$ имеем, что

$$\rho\left(P_i^t, E^t\right) = \frac{\left|P_i^0 E^0\right| \cdot \left|E^t E^T\right|}{\left|E^0 E^T\right|} = \frac{\left|E^t E^T\right|}{\left|E^0 E^T\right|} \rho\left(P_i^0, E^0\right) = \left(1 - \frac{\left|E^0 E^t\right|}{\left|E^0 E^T\right|}\right) \rho\left(P_i^0, E^0\right) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \rho\left(P_i^0, E^0\right).$$

Итак,

$$\bar{v}\left(P_i; t, \bar{x}(t)\right) = -\left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{\alpha_{i1}}{u_i - v}, \quad i = 1, 2.$$

Система (4) примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1^{\,t} \le \left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{\alpha_{11}}{u_1 - v}, \\ &\alpha_2^{\,t} \le \left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{\alpha_{21}}{u_2 - v}, \\ &\alpha_1^{\,t} + \alpha_2^{\,t} = 2(T - t) \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Поскольку

$$\left(1 - \frac{t}{T}\right)\left(\frac{\alpha_{11}}{u_1 - v} + \frac{\alpha_{21}}{u_2 - v}\right) \ge 2(T - t),$$

множество решений системы (6) не является пустым. Осталось доказать справедливость (5).

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1.«Точки»

$$A^0 = \left(2T - \frac{\alpha_{21}}{u_2 - v}; \frac{\alpha_{21}}{u_2 - v}\right) \quad \text{и}$$

$$A^t = \left(2(T - t) - \left(1 - \frac{t}{T}\right)\frac{\alpha_{21}}{u_2 - v}; \left(1 - \frac{t}{T}\right)\frac{\alpha_{21}}{u_2 - v}\right)$$

лежат на одной прямой.

Доказательство. Составим уравнение прямой OA^0 (см. рис. 2, система координат xOy):

$$\frac{y}{\dfrac{\alpha_{21}}{u_2 - v}} = \frac{x}{2T - \dfrac{\alpha_{21}}{u_2 - v}},$$

$$y = \frac{\alpha_{21}}{2T(u_2 - v) - \alpha_{21}} x,$$

$$k^0 = \frac{\alpha_{21}}{2T(u_2 - v) - \alpha_{21}}.$$

Составим уравнение прямой OA^t:

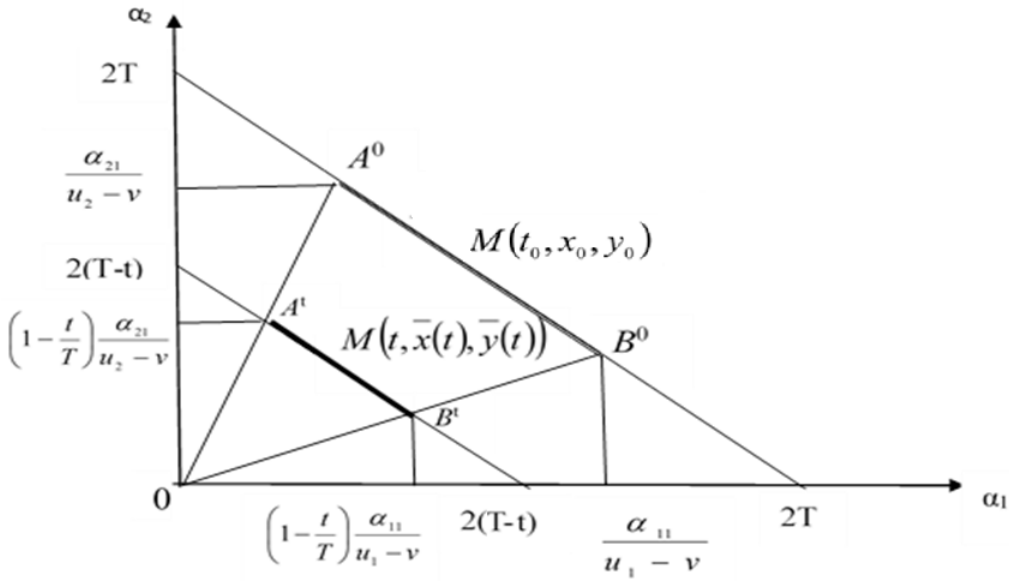
$$\frac{y}{\left(1 - \dfrac{t}{T}\right)\dfrac{\alpha_{21}}{u_2 - v}} = \frac{x}{2(T - t) - \left(1 - \dfrac{t}{T}\right)\dfrac{\alpha_{21}}{u_2 - v}},$$

$$y = \frac{\left(1 - \dfrac{t}{T}\right)\dfrac{\alpha_{21}}{u_2 - v}}{2(T - t) - \left(1 - \dfrac{t}{T}\right)\dfrac{\alpha_{21}}{u_2 - v}} =$$

$$= \frac{\alpha_{21}}{2T(u_2 - v) - \alpha_{21}} x,$$

$$k^t = \frac{\alpha_{21}}{2T(u_2 - v) - \alpha_{21}}.$$

Поскольку $k^0 = k^t$ и прямые OA^0 и OA^t пересекаются, то они совпадают.



Р и с. 2. Прямые OA^0 и OA^t (OB^0 и OB^t) совпадают

F i g. 2. Straights lines OA^0 and OA^t (OB^0 and OB^t) coincide

Лемма 2. «Точки» $B^0 = \left(\frac{\alpha_{11}}{u_1 - v};\ 2T - \frac{\alpha_{11}}{u_1 - v}\right)$ и

$B^t = \left(\left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{\alpha_{11}}{u_1 - v};\ 2(T-t) - \left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{\alpha_{11}}{u_1 - v}\right)$ лежат на одной прямой.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

В силу выпуклости множества дележей достаточно доказать справедливость (6) только для двух дележей:

$$\xi(T) = \{\xi_1(T), \xi_2(T)\} = \left\{2T - \frac{\alpha_{21}}{u_2 - v},\ \frac{\alpha_{21}}{u_2 - v}\right\},$$

$$\eta(T) = \{\eta_1(T), \eta_2(T)\} = \left\{\frac{\alpha_{11}}{u_1 - v},\ 2T - \frac{\alpha_{11}}{u_1 - v}\right\};$$

$$\xi(T) = \{\xi_1(T), \xi_2(T)\}:$$

$$\xi_1(T) = 2T - \frac{\alpha_{21}}{u_2 - v} = \int_0^T \beta_1^{(1)}(\tau)d\tau;$$

в качестве $\beta_1^{(1)}(\tau)$ примем $\frac{1}{T}\left(2T - \frac{\alpha_{21}}{u_2 - v}\right)$,

$$\beta_1^{(1)}(\tau) = \frac{1}{T}\left(2T - \frac{\alpha_{21}}{u_2 - v}\right) = 2 - \frac{\alpha_{21}}{(u_2 - v)T};$$

$$\xi_2(T)=\frac{\alpha_{21}}{u_2-v}=\int_0^T \beta_2^{(1)}(\tau)d\tau,$$

в качестве $\beta_2^{(1)}(\tau)$ примем $\frac{\alpha_{21}}{(u_2-v)T}$,

$$\beta_2^{(1)}(\tau)=\frac{\alpha_{21}}{(u_2-v)T}.$$

$$\eta(T)=\{\eta_1(T),\eta_2(T)\}:$$

$$\eta_1(T)=\frac{\alpha_{11}}{u_1-v}=\int_0^T \beta_1^{(2)}(\tau)d\tau;$$

в качестве $\beta_1^{(2)}(\tau)$ – $\frac{\alpha_{11}}{(u_1-v)T}$,

$$\beta_1^{(2)}(\tau)=\frac{\alpha_{11}}{(u_1-v)T};$$

$$\eta_2(T)=2T-\frac{\alpha_{11}}{u_1-v}=\int_0^T \beta_2^{(2)}(\tau)d\tau;$$

в качестве $\beta_2^{(2)}(\tau)$ – $\frac{1}{T}\left(2T-\frac{\alpha_{11}}{u_1-v}\right)$,

$$\beta_2^{(2)}(\tau)=$$

$$=\frac{1}{T}\left(2T-\frac{\alpha_{11}}{u_1-v}\right)=2-\frac{\alpha_{11}}{(u_1-v)T}.$$

$$\xi(T)\in\left\{\xi(t)+M\left(t,\bar{x}(t)\right)\right\}\subset M(t_0,x_0)$$

и $\eta(T)\in\left\{\eta(t)+M\left(t,\bar{x}(t)\right)\right\}\subset M(t_0,x_0)$

в силу справедливости лемм 1 и 2 эквивалентно системе линейных неравенств

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_1(T)\le \xi_1^{\,t}+\int_0^t \beta_1^{(2)}(\tau)d\tau\le \eta_1(T),\\
&\eta_2(T)\le \xi_2^{\,t}+\int_0^t \beta_2^{(2)}(\tau)d\tau\le \xi_2(T),\\
&\xi_1(T)\le \eta_1^{\,t}+\int_0^t \beta_1^{(1)}(\tau)d\tau\le \eta_1(T),\\
&\eta_2(T)\le \eta_2^{\,t}+\int_0^t \beta_2^{(1)}(\tau)d\tau\le \xi_2(T)
\end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Распишем (7):

$$\left.\begin{aligned}
&2T-\frac{\alpha_{21}}{u_2-v}\le 2(T-t)-\left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{\alpha_{21}}{u_2-v}+\int_0^t\frac{\alpha_{11}}{(u_1-v)T}d\tau\le\frac{\alpha_{11}}{u_1-v},\\
&2T-\frac{\alpha_{11}}{u_1-v}\le\left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{\alpha_{21}}{u_2-v}+\int_0^t\left(2-\frac{\alpha_{11}}{(u_1-v)T}\right)d\tau\le\frac{\alpha_{21}}{u_2-v},\\
&2T-\frac{\alpha_{21}}{u_2-v}\le\left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{\alpha_{11}}{u_1-v}+\int_0^t\left(2-\frac{\alpha_{21}}{(u_2-v)T}\right)d\tau\le\frac{\alpha_{11}}{u_1-v},\\
&2T-\frac{\alpha_{11}}{u_1-v}\le 2(T-t)-\left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{\alpha_{11}}{u_1-v}+\int_0^t\frac{\alpha_{21}}{(u_2-v)T}d\tau\le\frac{\alpha_{21}}{u_2-v}
\end{aligned}\right\},$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&2T-\frac{\alpha_{21}}{u_2-v}\le 2(T-t)-\left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{\alpha_{21}}{u_2-v}+\frac{\alpha_{11}t}{(u_1-v)T}\le\frac{\alpha_{11}}{u_1-v},\\
&2T-\frac{\alpha_{11}}{u_1-v}\le\left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{\alpha_{21}}{u_2-v}+2t-\frac{\alpha_{11}t}{(u_1-v)T}\le\frac{\alpha_{21}}{u_2-v},\\
&2T-\frac{\alpha_{21}}{u_2-v}\le\left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{\alpha_{11}}{u_1-v}+2t-\frac{\alpha_{21}t}{(u_2-v)T}\le\frac{\alpha_{11}}{u_1-v},\\
&2T-\frac{\alpha_{11}}{u_1-v}\le 2(T-t)-\left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{\alpha_{11}}{u_1-v}+\frac{\alpha_{21}t}{(u_2-v)T}\le\frac{\alpha_{21}}{u_2-v}
\end{aligned}\right\}. \quad (8)$$

Легко показать, что система двойных линейных неравенств (8) имеет решение только в том и только том случае, когда

$$\frac{\alpha_{11}}{u_1 - v} + \frac{\alpha_{21}}{u_2 - v} \geq 2T. \qquad (9)$$

Поскольку (9) действительно имеет место, то сильная устойчивость множества дележей доказана.

Обсуждение и заключения

В работе приводятся оптимальные стратегии, а также оптимальные траектории движения игроков. Выбранный принцип оптимальности оказался сильно динамически устойчивым и, следовательно, игроки не имеют оснований для окончания игры.

Попытки применить динамически неустойчивые (несостоятельные во времени) принципы оптимальности для прикладных задач в области экономики, менеджмента, охраны окружающей среды и т. д., как правило, приводят к грубым ошибкам, в результате которых принятые «оптимальные» решения оказываются нереализованными.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Петросян Л. А., Ширяев В. Д.** Групповое преследование одним преследователем нескольких преследуемых // Вестник ЛГУ (Сер. «Математика, механика и астрономия»). 1980. № 13. С. 50–57.

2. **Петросян Л. А., Томский Г. В.** Геометрия простого преследования. Новосибирск : Наука, 1983. 144 с. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=27332819

3. **Петросян Л. А., Рихсиев Б. Б.** Преследование на плоскости. М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. литер., 1981. 96 с. URL: URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=26228842

4. Ширяев В. Д., Бикмурзина Р. Р. Динамическая устойчивость решения в простой дифференциальной игре четырех лиц // Науч. тр. SWorld. 2015. Т. 7, вып. 2 (39). С. 60–64. URL: http://www.sworld.com.ua/konfer39/97.pdf

5. **Ширяев В. Д., Бикмурзина Р. Р.** Сильная динамическая устойчивость в простой дифференциальной игре четырех лиц // Науч. тр. SWorld. 2015. Т. 7, вып. 2 (39). С. 64–68. URL: http://sworld.com.ua/konfer39/98.pdf

6. **Петросян Л. А.** Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками // Вестник Ленингр. ун-та (Сер. 1). 1977. Вып. 4, № 19. С. 46–52. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=23664524

7. **Петросян Л. А.** Построение сильно динамически устойчивых решений в кооперативных дифференциальных играх // Вестник Санкт-Петербург. ун-та (Сер. «Математика, механика и астрономия»). 1992. № 4. С. 33–38.

8. **Петросян Л. А., Данилов Н. Н.** Устойчивость решений в неантагонистических дифференциальных играх с трансферабельными выигрышами // Вестник Ленинград. ун-та, 1979. № 1. С. 46–54. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=25699423

9. **Петросян Л. А.** Сильно динамически устойчивые принципы оптимальности в многокритериальных задачах оптимального управления // Техническая кибернетика. 1993. № 1. С. 169–175.

10. **Петросян Л. А.** Сильно динамически устойчивые дифференциальные принципы оптимальности // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. 1993. № 22. С. 35–40.

11. **Петросян Л. А., Кузютин Д. В.** Устойчивые решения позиционных игр. СПб. : Изд-во Санкт-Петербург. ун-та, 2008. 326 с. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=19456679

12. **Petrosjan L. A.** Strongly time consistent optimality principles in the games with discount payoffs // Lecture notes in control and information sciences. 1994. № 197. P. 513–520. URL: https://www.researchgate.net/publication/266335984_Strongly_time-consistent_differential_optimality_principles

13. **Kreps D. M., Ramey G.** Structural consistency, consistency and sequential rationality // Econometrica. 1987. Vol. 55. P. 1331–1348. URL: https://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v55y1987i6p1331-48.html

14. **Peleg B., Tijs S.** The consistency principle for Games in strategic form // Intern. J. Game Theory. 1996. Vol. 25. P. 13–34. DOI: 10.1007/BF01254381

15. **Kidland F. E., Prescott E. C.** Rules rather than decisions: the inconsistency of optimal plan // J. of Political Economy. 1977. Vol. 85. P. 473–490. URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.603.6853&rep=rep1&type=pdf

16. **Кузютин Д. В.** К проблеме устойчивости решений позиционных игр // Вестник Санкт-Петербург. ун-та (Сер. 1). 1995. Вып. 4, № 22. С. 18–23.

17. **Kuzutin D., Osokina O., Romanenko I.** On the consistency of optimal behavior in extensive games // Game Teory and Applications. 1997. Vol. 3. P. 107–116. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=23576894

Поступила 14.03.2017; принята к публикации 28.04.2017; опубликована онлайн 14.06.2017

Об авторах:

Ширяев Виктор Дмитриевич, профессор кафедры фундаментальной информатики, факультет математики и информационных технологий, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0497-3769**, shiryayevvd@mail.ru

Бикмурзина Равиля Ряшитовна, доцент кафедры фундаментальной информатики, факультет математики и информационных технологий, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат педагогических наук, **ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7651-6340**, bravilya@mail.ru

Вклад соавторов: В. Д. Ширяев: постановка задачи, научное руководство, подготовка начального текста с последующей доработкой; Р. Р. Бикмурзина: работа с литературой, компьютерные работы.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

REFERENCES

1. Petrosyan L. A., Shiryayev V. D. [Group pursuit of several pursues by one pursuer]. *Vestnik LGU: Matematika, mekhanika i astronomiya* = LGU Bulletin: Mathematics, Mechanics and Astronomy. 1980; 13:50-57. (In Russ.)

2. Petrosyan L. A., Tomskiy G. V. [Geometry of simple pursuit]. Novosibirsk: Nauka Publ.; 1983. Available at: http://elibrary.ru/item.asp?id=27332819 (In Russ.)

3. Petrosyan L. A., Rikhsiev B. B. [Pursuit on the plane]. Moscow: Nauka Publ.; 1981. Available at: http://elibrary.ru/item.asp?id=26228842 (In Russ.)

4. Shiryayev V. D., Bikmurzina R. R. Dynamic stability of solution in a simple differential game for four individuals. *Nauchnyye trudy SWorld* = Scientific papers SWorld. 2015; 2(39):60-64. Available at: http://www.sworld.com.ua/konfer39/97.pdf (In Russ.)

5. Shiryayev V. D., Bikmurzina R. R. Strong dynamic stability in a simple differential game for four individuals. *Nauchnyye trudy SWorld* = Scientific papers SWorld. 2015; 2(39):64-68. Available at: http://sworld.com.ua/konfer39/98.pdf (In Russ.)

6. Petrosyan L. A. [Stability of solutions in differential games with many participants]. *Vestnik Leningradskogo universiteta: Seriya 1* = Leningrad University Bulletin: Series 1. 1977; 4(19):46-52. Available at: http://elibrary.ru/item.asp?id=23664524 (In Russ.)

7. Petrosyan L. A. [Construction of strongly dynamically stable solutions in cooperative differential games]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta: Matematika, mekhanika i astronomiya* = St. Petersburg University Bulletin: Mathematics, Mechanics and Astronomy. 1992; 4:33-38. (In Russ.)

8. Petrosyan L. A., Danilov N. N. [The stability of the solutions in nonantagonistic differential games with transferable wins]. *Vestnik Leningradskogo universiteta* = Leningrad University Bulletin. 1979; 1:46-54. Available at: http://elibrary.ru/item.asp?id=25699423 (In Russ.)

9. Petrosyan L. A. [Strongly dynamically stable optimality principles in multicriterial problems of optimal control]. *Tekhnicheskaya kibernetika* = Technical Cybernetics. 1993; 1:169-175. (In Russ.)

10. Petrosyan L. A. [Strongly dynamically stable differential optimality principles]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta* = St. Petersburg University Bulletin. 1993; 22:35-40. (In Russ.)

11. Petrosyan L. A., Kuzutin D. V. [Stable solutions of positional games]. St. Petersburg: St. Petersburg University Publ.; 2008. Available at: http://elibrary.ru/item.asp?id=19456679 (In Russ.)

12. Petrosyan L. A. Strongly time consistent optimality principles in the games with discount payoffs. Lecture notes in control and information sciences. 1994; 197:513-520. Available at: https://www.researchgate.net/publication/266335984_Strongly_timeconsistent_differential_optimality_principles

13. Kreps D. M., Ramey G. Structural consistency, consistency and sequential rationality. Econometrica. 1987; 55:1331-1348. Available at: https://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v55y1987i6p1331-48.html

14. Peleg B., Tijs S. The consistency principle for Games in strategic form. Intern. J. Game Theory. 1996; 25:13-34. DOI: 10.1007/BF01254381

15. Kidland F. E., Prescott E.C. Rules rather than decisions: the inconsistency of optimal plan. J. of Political Economy. 1977; 85:473-490. Available at: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.603.6853&rep=rep1&type=pdf

16. Kuzyutin D. V. [To the problem of stability of solutions of positional games]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta: Seriya 1* = St. Petersburg University Bulletin: Series 1. 1995; 22(4):18-23. (In Russ.)

17. Kuzutin D., Osokina O., Romanenko I. On the consistency of optimal behavior in extensive games. Game Teory and Applications. 1997; 3:107-116. Available at: http://elibrary.ru/item.asp?id=23576894

Submitted 14.03.2017; revised 28.04.2017; published online 14.06.2017

About the authors:

Viktor D. Shiryayev, Professor of Chair of Fundamental Informatics, Faculty of Mathematics and Information Technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), docent, **ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0497-3769**, shiryayevvd@mail.ru

Ravilya R. Bikmurzina, Associated Professor of Chair of Fundamental Informatics, Faculty of Mathematics and Information Technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Pedagogy), **ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7651-6340**, bravilya@mail.ru

Contribution of the co-authors: V. Shiryayev: formulation of the problem, scientific supervision, writing the draft with subsequent revision; R. Bikmurzina: reviewing of literature, computer processing of data.

All authors have read and approved the final version of the manuscript.