

**ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ**

С. В. Гарина, Б. М. Люпаев, М. Б. Никишин
ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия)

В статье рассматриваются многокритериальные решения для задач оптимизации в строительстве; предлагается метод поиска оптимальных решений. Данные задачи имеют большую сложность, поскольку к их оптимальным решениям предъявляются требования по нескольким критериям. В эти решения постоянно вносятся изменения и дополнения, что приводит к необходимости оперативной проверки их оптимальности. Методы поиска оптимальных решений согласуются с деталями на каждом этапе реализации. Требованиями по критериям могут быть затраты средств, времени, материалов, а также социальные и экологические последствия от реализации решений. Каждому критерию соответствуют целевые функции, имеющие свои оптимальные значения. Реализация подобных многокритериальных решений – сложная задача. В статье рассматриваются возрастающие и убывающие части целевой функции; дается оценка оптимального решения с помощью коэффициента эффективности. Учитывается степень влияния переменных на целевую функцию, а также определяются отклонения функций от замены оптимальных значений. Предлагается рассмотреть приоритеты по каждому критерию. Полученное решение позволяет свести задачу к однокритериальной. На примере стоимости строительных объектов даются расчеты компромиссных решений с учетом рассматриваемых критериев. Приводится пример двух целевых функций, одна из которых выражает количество квартир, а другая – стоимость. В результате расчетов обобщенная целевая функция достигает оптимального значения. Предполагается в общем случае использовать приоритетные оптимальные решения по отдельным критериям. Варианты решений сравниваются с допустимым значением целевой функции. Когда наборы частных решений являются стохастическими, для отдельных блоков задачи эффективны компромиссные решения.

Ключевые слова: оптимизация, оптимальное решение, многокритериальное решение, метод поиска, целевая функция, сооружение, однокритериальная задача

OPTIMIZATION OF MULTI-CRITERIA DECISIONS

S. V. Garina, B. M. Lyupayev, M. B. Nikishin
Ogarev Mordovia State University (Saransk, Russia)

The article deals with multi-criteria decisions for optimization in construction industry. A method for finding optimal decisions is offered. The optimization problems involve great difficulty as multi-criteria requirements are placed on their optimal solutions. Changes and additions are constantly made in multi-criteria decisions that cause the need for a rapid analysis of their optimality. The methods of making optimal decisions and details are coordinated at each stage of implementing. The requirements on criteria can be cash and time expenditure, material costs, and social and environmental consequences of the implementation of the decisions. Each criterion has target functions with optimal values. The implementation of multi-criteria decisions is a difficult task. The article deals with increasing and decreasing parts of the target function and assesses the optimal solution by a factor of efficiency. It takes into account



the impact of variables on the target function, and identifies the function deviations from replacement of optimal values. It is proposed to consider the priorities for each criterion. The solution obtained makes it possible to convert the problem to a single-criterion problem. The article describes computation for compromise solutions in view of the criteria considered on the example of the cost of construction projects. The example of the two target functions is given: one function shows the number of apartments, and the other – their value. Through calculations, the generalized target function gets an optimum value. It is expected that in the general case the priority optimum solutions by selected criteria will be used. Possible solutions are compared with the permissible value of the target function. When the sets of particular solutions are stochastic, compromise solutions are effective for the some blocks of a problem.

Keywords: optimization, optimal solution, multi-criteria decision, method of search, target function, structure, single-criterion problem

К решениям задач предъявляются требования по следующим критериям: затраты средств, времени, материалов, а также отсутствие или приемлемые социальные и экологические последствия от их реализации. Кроме этого, выделяют архитектурное оформление зданий и сооружений, доступность услуг, размеры зарплат, пенсий, пособий и т. д.

Требования заказчика – решающий критерий оценки решения. Если решение затрагивает интересы нескольких сторон, то его принимают на собраниях, в судах, на выборах, референдумах, международных конференциях (например, решение о завершении строительства объектов к олимпиаде в г. Сочи, несмотря на их удорожание в десятки раз).

Реализация подобных многокритериальных решений – сложная задача. Например, из соображений экономической целесообразности было принято решение увеличить бюджет страны за счет значительного возрастания отчислений с доходов частных предпринимателей. Социальные последствия этого шага представляют собой убыток бюджета. Аналогичный эффект произвело повышение стоимости алкоголя. Предполагаем похожую ситуацию в случае повышения цен на табак. Недоучет социальных критериев приводит к уменьшению доходов бюджета на всех уровнях за счет сокращения продаж этих товаров и роста расходов на здравоохранение и контролирующие органы.

В многокритериальные решения постоянно вносятся изменения и дополнения, что приводит к необходимости оперативной проверки их оптимальности. Сложность задачи сводится к определению соотношения оптимальных решений для многих критериев.

Многокритериальные решения являются компромиссными, удовлетворяющими все заинтересованные стороны. Методы поиска оптимальных решений и детали согласуются на каждом этапе реализации. Например, при строительстве автобана Москва – Санкт-Петербург была достигнута договоренность с экологами о компенсации потерь в лесном хозяйстве и др.

Рассмотрим некоторые методы поиска компромиссных решений многокритериальных задач (оценка оптимальности решений однокритериальных задач предлагается в [2–3; 5]).

Задана функция $F(x)$ вида

$$F(x) = \sum_{i=1}^n A_i f_i(x) + C_0, \quad (1)$$

где $A_i F_i(x)$ – переменная часть $F(x)$; C_0 – постоянная часть.

Экстремум данной функции достигается, когда

$$\sum_{i=1}^n \frac{dA_i f_i(x)}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{dA_i^+(x)}{dx} - \sum_{i=1}^n \frac{dA_i^-(x)}{dx} = 0. \quad (2)$$



Обозначим

$$\sum_{i=1}^n \frac{dA_i^+(x)}{dx} = \bar{W}; \sum_{i=1}^n \frac{dA_i^-(x)}{dx} = \bar{W}, \quad (3)$$

где \bar{W} , \bar{W} – возрастающая и убывающая части выражения (2) при увеличении x соответственно.

Оптимальному значению функции (1) соответствует

$$\bar{W} = \bar{W}. \quad (4)$$

Степень отклонения x от x^{omn} оценивается коэффициентом эффективности:

$$\Theta = \bar{W} / \bar{W}. \quad (5)$$

При оптимальном решении $\Theta = 1$.

В многокритериальных задачах каждому критерию соответствуют целевые функции $F_i(x)$, ... $F_n(x)$, которые имеют свои оптимальные значения:

$$F_1(x_1^{omn}), \dots, F_n(x_n^{omn}). \quad (6)$$

Рассмотрим, как используются функции (6) при определении компромиссного значения переменных x_k :

$$F_{1k}(x_k) \dots F_{nk}(x_k). \quad (7)$$

Отклонения в (6) от замены оптимальных значений $x_1^{omn} \dots x_n^{omn}$ на $x_1^k \dots x_n^k$ в (7):

$$\begin{aligned} \Delta F_{1k} &= F_{1k}(x_1^k) - F_{1k}(x_1^{omn}); \\ \Delta F_n &= F_n(x_1^k) - F_n(x_n^{omn}). \end{aligned} \quad (8)$$

Приведем примеры поиска компромиссных значений x_k .

Даны две независимые функции:

$$F_1 = 2x_1 + \frac{2}{x_1}; x_1^{omn} = 1; F_1^{omn} = 4;$$

$$\bar{W}_1 = 2; \bar{W}_1 = \frac{2}{x_1^2}; -_1 = \frac{2/2}{x_1^2} = 1; x_1^{omn} = 1;$$

$$F_2 = x_2 + \frac{4}{x_2}; x_2^{omn} = 2; F_2^{omn} = 4;$$

$$\bar{W}_2 = 1; \bar{W}_2 = \frac{4}{x_2^2}; -_2 = \frac{1/4}{x_2^2} = 1; x_2^{omn} = 2,$$

где F_j – время строительства в годах, а F_j – стоимость строительства в млн руб. Тогда

$$F_{1k} = 2x_k + \frac{2}{x_k}; F_{2k} = x_k + \frac{4}{x_k}. \quad (9)$$

Обобщенная целевая функция примет вид

$$F_k = 2x_k + x_k + \frac{2}{x_k} + \frac{4}{x_k} = 3x_k + \frac{6}{x_k};$$

$$\bar{W}_k = 3; \bar{W}_k = \frac{6}{x_k^2}; (x_k^{omn})^2 = \frac{6}{3} = 2; x_k = 1,41;$$

$F_{1k} = 2 * 1,41 + 2/1,41 = 4,24$ потери времени 0,24 мес.;

$F_{2k} = 1,41 + 4/1,41 = 4,23$ потери в 0,23 млн руб.

Если X – это десятки работающих, то для оптимального варианта F_1^{omn} требуется 10 чел., для F_2^{omn} – 20.

Если x_k^* допустима для $F_1^* \geq 4,1$, то задача становится однокритериальной для функции F_1 . Тогда

$$F_1^* = 2x_k^* + \frac{2}{x_k^*}, \quad (10)$$

или $2(x_k^*)^2 - F_1^* \cdot x_k^* + 2 = 0$, $x_k^* = 1,25$ и $F_1^* = 4,1$ г.



При этом $F_2 = 1,25 + \frac{4}{1,25} = 4,45$ млн руб.

Вариант решения необходимо сравнивать с допустимым значением целевой функции (10). В рассмотренном случае F_1^* и F_2^* равны 4,1/4,45.

В рассмотренных примерах приоритеты критериев равны $\Pi_1 = \Pi_2 = 1$. Если приоритеты разные $\Pi_1 = 1; \Pi_2 = 0,5$ и т. д., тогда F_1 в полученных выражениях необходимо заменить на $\Pi_1 \cdot F_1$, а F_2 – на $\Pi_2 \cdot F_2$. Значения $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ согласуются с заинтересованными сторонами. Компромиссное решение в этом случае нужно пересмотреть.

Рассмотрим пример двух целевых функций, одна из которых выражает количество квартир, а другая – стоимость в млн руб.

$$F_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}, x_1^0 = 1, F_1^0 = 2 \text{ квартиры;}$$

$$1 \text{ квартира} = 10 \text{ млн руб.};$$

$$F_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}, x_2^0 = 2, F_2^0 = 4 \text{ млн.}$$

Если рассматривать критерии с учетом приоритетов

$$F_1 = 10x_1 + \frac{10}{x_1}, x_1^0 = 1, F_1^0 = 20 \text{ млн;}$$

$$F_2 = x_2 + \frac{4}{x_2}, x_2^0 = 2, F_2^0 = 4 \text{ млн,}$$

Получаем $F_1^0 + F_2^0 = 24$ млн.

Суммарная функция:

$$F_k = 11x_k + \frac{14}{x_k}, x_k = 1,13;$$

$$F_k = 12,4 + 12,4 = 24,8 \text{ млн.}$$

В общем случае используют приоритетные оптимальные решения по отдельным критериям (6). Когда наборы частных решений являются стохастическими (нерегулярными), эффективны компромиссные решения для отдельных блоков задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Антонов, К. К. Проектирование железобетонных конструкций / К. К. Антонов. – Москва : Стройиздат, 1966. – 380 с.
2. Гарина, С. В. Решение задачи оптимизации параметров строительных конструкций / С. В. Гарина // Методы возмущений в гомологической алгебре и динамика систем. – Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 2004. – С.129–135.
3. Люпаев, Б. М. Экономические оценки оптимальности железобетонных изгибаемых элементов прямоугольного и тавровых форм сечения при проектировании по несущей способности / Б. М. Люпаев, Ю. Б. Потапов, Н. И. Дудкин // Совершенствование проектирования и расчета ж/б конструкций. – Ростов-на-Дону, 1993. – С.143–147.
4. Люпаев, Б. М. О качественных оценках оптимальности технических решений / Б. М. Люпаев, С. В. Гарина // Современные проблемы строительного материаловедения. – Воронеж : ВГАСА, 1999. – С. 259–263.
5. Люпаев, Б. М. Особенности оптимизации расчета железобетонных элементов на поперечную силу : материалы междунар. науч.-техн. конф. «Актуальные вопросы строительства» / Б. М. Люпаев, С. В. Гарина. – Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 2008. – С. 285–287.
6. Поляк, Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – Москва : Наука, 1983. – 384 с.
7. Уайлд, Д. Оптимальное проектирование / Д. Уайлд. – Москва : Мир, 1981. – 272 с.
8. Щенников, В. Н. К решению проблемы оптимизации параметров строительных конструкций / В. Н. Щенников, Б. М. Люпаев, С. В. Гарина // Известия высших учебных заведений : Строительство. – 2006. – № 10 (574). – С. 101–106.

В статье предлагается метод оптимизации параметров строительных конструкций, разработанный на базе математической теории устойчивости и теории управления динамическими процессами; решается задача оптимизации параметров монолитного железобетонного перекрытия.



9. **Щенников, В. Н.** Использование математической модели для оценки оптимальности параметров строительных конструкций / В. Н. Щенников, Б. М. Люпаев, С. В. Гарина // Вестник Мордовского университета. – 2004. – № 3–4. – С. 135–140.

В статье предлагается способ экономической оценки параметров несущих железобетонных и других композиционных конструкций.

10. **Химмельблау, Д.** Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – Москва : Мир, 1975. – 534 с.

Поступила 14.09.2015 г.

Об авторах:

Гарина Светлана Владимировна, доцент кафедры фундаментальной информатики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), кандидат технических наук, **ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6153-8977>**, garinasv@mail.ru

Люпаев Борис Михайлович, профессор кафедры автомобильных дорог и специальных инженерных сооружений архитектурно-строительного факультета ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), доктор технических наук, **ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8300-6560>**, lyupaevbm@mail.ru

Никишин Михаил Борисович, доцент кафедры фундаментальной информатики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), кандидат педагогических наук, **ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1700-3637>**, nikishinmb@mail.ru

Для цитирования: Гарина, С. В. Оптимизация многокритериальных решений / С. В. Гарина, Б. М. Люпаев, М. Б. Никишин // Вестник Мордовского университета. – 2015. – Т. 25, № 4. – С. 12–17. DOI: 10.15507/0236-2910.025.201504.012

REFERENCES

1. Antonov K. K. *Proyektirovaniye zhelezobetonnykh konstruksiy* [Design of concrete structures]. Moscow: Stroyizdat Publ., 1966, 380 p.
2. Garina S. V. *Resheniye zadachi optimizatsii stroitelnykh konstruksiy* [Parameters optimization solution for building constructions]. *Metody vozmushcheniy v gomologicheskoy algebra I dinamika system* [Methods of perturbations in homological algebra and speaker systems]. Saransk: Mordovia State University Press Publ., 2004, pp. 129–135.
3. Lyupayev B. M., Potapov Yu. B., Dudkin N. I. *Economicheskkiye otsenki optimalnosti zhelezobetonnykh izgibayemykh elementov pryamougolnogo I tavrovyykh form secheniya pri proyektirovanii po nesushchey sposobnosti* [Economic evaluation of optimality of reinforced concrete bent elements of rectangular and T-shaped cross-sectional shape in the design of the bearing capacity]. *Sovershenstvovaniye proyektirovaniya I rascheta zh/b konstruksiy* [Improvement of design and calculation w / concrete structures]. – Rostov-on-Don, 1993, pp. 143–147.
4. Lyupayev B. M., Garina S. V. *O kachestvennykh otsenkakh optimalnosti tekhnicheskikh resheniy* [On qualitative evaluation of optimal technical solutions]. *Sovremennyye problemy stroitel'nogo materialovedeniya* [Modern problems of building materials]. Voronezh: VGASA Publ., 1999, pp. 259–263.
5. Lyupayev B. M., Garina S. V. *Osobennosti optimizatsii rascheta zhelezobetonnykh elementov na poperechnuyu silu: materialy mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. "Aktualnyye voprosy stroitelstva"* [Features optimization calculation of reinforced concrete elements on the transverse force: Proceedings of the International Scientific-Technical conference "Actual issues of construction"]. Saransk: Mordovia State University Press Publ., 2008, pp. 285–287.
6. Polyak B. T. *Vvedeniye v optimizatsiyu* [Introduction to optimization]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 384 p.
7. Uayld D. *Optimalnoye proyektirovaniye* [Optimal Design]. Moscow: Mir Publ., 1981, 272 p.



8. Shchennikov V. N., Lyupayev B. M., Garina S. V. K resheniyu problem optimizatsii parametrov stroitelnykh konstruksiy [To solving the problem of optimizing the parameters of constructions]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy: Stroitelstvo* [News of higher educational institutions. Construction]. 2006, no. 10 (574), pp. 101–106.

The information contained in the article provides the construction parameter optimization method developed on the basis of the mathematical theory of stability and the theory of dynamic processes management; the problem is solved by optimizing the parameters of monolithic ferroconcrete overlapping.

9. Shchennikov V. N., Lyupayev B. M., Garina S. V. Ispolzovaniye matematicheskoy modeli dlya otsenki optimalnosti parametrov stroitelnykh konstruksiy [Using a mathematical model to estimate the optimal parameters of constructions]. *Vestnik Mordovskogo universiteta* [Mordovia University Bulletin]. 2004, no. 3–4, pp. 135–140.

The article provides a method of parameters assessment of the bearing ferroconcrete and other composite structures.

10. Himmelblau D. Prikladnoye nelineynoye programmirovaniye [Applied nonlinear programming]. Moscow: Mir, 1975, 534 p.

Submitted 14.09.2015

About the authors:

Garina Svetlana Vladimirovna, associate professor of chair of Fundamental Computer Sciences of Ogarev Mordovia State University (68, Bolshevistskaya str., Saransk, Russia), Ph.D. (Engineering), **ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6153-8977>**, garinasv@mail.ru

Lyupayev Boris Mikhaylovich, professor of chair of Motor Ways and Special Engineering Structures of Ogarev Mordovia State University (68, Bolshevistskaya str., Saransk, Russia), Dr.Sci. (Engineering), **ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8300-6560>**, lyupaev6m@mail.ru

Nikishin Mikhail Borisovich, associate professor of chair of Fundamental Computer Sciences of Ogarev Mordovia State University (68, Bolshevistskaya str., Saransk, Russia), Ph.D. (Pedagogy), **ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1700-3637>**, nikishinmb@mail.ru

For citation: Garina S. V., Lyupayev B. M., Nikishin M. B. Optimization of multi-criteria decisions. *Vestnik Mordovskogo universiteta* [Mordovia University Bulletin]. 2015, vol. 25, no. 4, pp. 12–17. DOI: 10.15507/0236-2910.025.201504.012