УДК 37:51 DOI: 10.15507/VMU.025.201501.037

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА – ВЫСШЕЕ ПРОЯВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАННОСТИ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ

Г. С. Евдокимова, В. Д. Бочкарева

В связи с модернизацией обучения происходит обновление содержания, методик и технологий в процессе общего и высшего образования. В этих условиях особое значение приобретает формирование математической культуры у будущих профессионалов, так как культура – это высшее проявление человеческой образованности и профессиональной компетентности.
В статье утверждается, что в структурном отношении понятие о математической культуре включает четыре основных компонента: математическую картину мира, математическое мышление, методы математики и язык математики. Подробно анализируются два из них: методы математики и язык математики. Отмечается, что для математиков большое значение имеет индуктивная логика, общие приемы и методы которой вырабатывают такие научные стохастические понятия, как анализ и синтез, абстракция, детерминация. Подчеркивается, что математическая теория вероятностей представляет собой язык для обсуждения различными способами ряда эмпирических проблем.

Ключевые слова: математическая, стохастическая культуры, методы математики, язык математики, анализ, детерминация, индукция, математическая абстракция, аналогия в математике, дедукция в математике.

MATHEMATICAL CULTURE – THE HIGHEST EXPRESSION OF HUMAN EDUCATION AND PROFESSIONAL COMPETENCE

G. S. Evdokimova, V. D. Bochkareva

Due to the fact of modernization of training process content, methods and technologies in general and higher education are being updated. Under these conditions, formation mathematical culture obtains the special importance for future professionals since culture is the highest expression of human education and professional competence.
This article states that structurally the concept of mathematical culture has four main components: a mathematical world view, mathematical thinking, methods of mathematics and language of mathematics.
Two of them are analyzed in details – methods of mathematics and mathematical language. It is noted that for the mathematicians inductive logic, common tools and techniques that produce the following scientific stochastic concepts are essential: analysis, synthesis, abstraction and determination. The authors emphasized that the mathematical theory of probability is the language for discussion of empirical problems in a number of different ways.

Keywords: mathematical culture, stochastic culture, methods of mathematics, language of mathematics, analysis, determination, induction, mathematical abstraction, analogy in mathematics, deduction in mathematics.

Высшим проявлением образованности и профессиональной компетенции человека является культура. Понятие «культура» является неоднородным в так называемом отраслевом, или вертикальном, аспекте. Действительно, можно говорить о различных культурах: математической, физической, инженерной, гуманитарной и др. Образуя объединенно общую культуру, они существуют и развиваются каждая в отдельности. Конечно, нас интересует, прежде всего, вопрос математической культуры в целом и стохастической культуры в частности.

В структурном отношении понятие о математической культуре включает 4 основных компонента: математическую картину мира, математическое мышление, методы математики и язык математики. Эти компоненты одинаковы как для специальной, так и для массовой математической культуры, а различаются они, прежде всего, глубиной раскрытия – большей в первом случае и меньшей – во втором [2]. Остановимся подробно на 3-м и частично на 4-м компонентах.

Методы математики. Поскольку возникает вопрос о логическом происхождении основных понятий и методов математики, а также об их отношении к общим законам мышления, то они (понятия и методы) становятся объектами логики и философии математики.

Однако логика математики исследует, во-первых, какие формы принимают в применении к объектам математического исследования общие методы научной работы (общее учение о математическом методе), а во-вторых, – логический характер методов отдельных частей математики. Первая и наиболее общая из всех наук, без знакомства с которой невозможно занятие всеми прочими науками, и особенно математикой, была изобретена и научно обоснована знаменитым греческим философом и естествоиспытателем Аристотелем и с тех пор носит название «логика».

Сходство между основными законами алгебры и законами логических операций настолько велико, что еще у Г. Лейбница, первого обратившего внимание на эту аналогию, возникла мысль о замене логических рассуждений рядом преобразований, формул, подобных тем, которыми пользуется алгебра для решения уравнений. При помощи «всеобщей математики» Лейбниц надеялся всякое рассуждение свести к комбинации знаков. Он даже мечтал о том времени, когда два философа, вместо бесконечных споров, будут, подобно двум математикам, брать перья в руки и заменять спор вычислением, т. е. когда всеобщая математика обратится, таким образом, в вычисление рассуждений и сольется с логикой.

Благодаря открытию Г. Лейбница анализа бесконечно малых основное внимание математиков было направлено на развитие и приложение этой теории в различных областях и те основы, на которых строилась современная математика, были «забыты».

Положение изменилось только тогда, когда К. Вейерштрасс и его школа указали, что ряд (довольно длинный) наиболее значимых математических положений является сомнительным. Потрясением для математиков явились и геометрия Н. И. Лобачевского, и парадоксы теории вероятностей. Математики усилили требовательность в отношении логического обоснования своей науки в противовес предшественникам. Ими сразу стали анализироваться способы доказательств, проверяться связи между теоремами, отыскиваться в рассуждениях также гипотезы и постулаты, которые ранее не были акцентированы. Стали выделяться принципы и аксиомы, которые являлись исходными для их дедукции, базовыми всей предлагаемой теории.

Как известно, большое значение для математиков имеет индуктивная логика, общие приемы и методы которой вырабатывают следующие научные стохастические понятия:

– анализ и синтез,
– абстракция,
– детерминация.

Анализ представляет собой разложение сложного понятия на более простые. *Синтез* состоит в образовании сложного понятия из более простых понятий.

Абстракция («отвлечение») представляет собой метод выделения некоторой части из одиночного явления, или некоторую одинаковую подчасть из ряда сходных понятий. Она существует только на базе опыта, предлагающего нечто особенное, отдельное, конкретное. Создание логических понятий представляет собой очень медленный, постепенный процесс, никогда не достигающий своего завершения в человеческой жизни. Преподавание, согласованное с природой, должно происходить сообразно естественному ходу образования понятий. Ясные, отчетливые наблюдения мы имеем в результате процесса апперцепции, а ясные, отчетливые понятия – в процессе абстракции. Соответственно, преподавание должно обязательно пройти эти два этапа от наблюдения и опыта к понятию. Окончательная стадия этого пути – упражнение, целью которого является переход знания к умению.

Детерминация («ограничение») представляет собой метод противоположный абстракции. Он состоит в обратном присоединении к отвлеченным признакам других признаков путем абстракции, благодаря чему получается более определенное, детерминированное понятие. При этом детерминация увеличивает содержание понятия, но ограничивает его объем.

Детерминация, как и абстракция, бывает двух типов, из которых первый дает понятие более конкретное, а второй – более частное, представляющее собой переход от родового понятия к видовому («специфика»). Нужно признать, что абстракция является приемом собственно аналитическим, а детерминация – синтетическим. При этом абстракцией ограничивается число признаков (содержание) понятия, но расширяется его объем. Детерминацией же увеличивается содержание понятия, но уменьшается его объем.

Индукция в математике может быть полной и неполной. Полная индукция представляет собой простое обращение дедуктивного доказательства. Всякое дедуктивное доказательство основывается в итоге на том, что все, являющееся высказанным относительно целого, может быть высказанным и относительно каждой его части. В связи с тем, что целое тождественно с множеством его частей, то и обратное тоже должно быть справедливо. Другими словами, все, что может быть приложено в качестве высказывания к каждой части целого, может быть приложено и ко всему целому. Если же множество частей не будет составлять всего объема, то индукция будет являться неполной и заключение не будет иметь бузусловной достоверности. При этом индукция всегда служила и служит главным методом научного исследования не только в опытных науках, но и стохастике.

Задача индукции заключается в выражении предполагаемых законов так, чтобы они вполне объясняли наблюдаемые факты и эти факты выводились из них дедуктивно. Таким образом, задача индуктивного исследования является обратной к задаче, с которой мы имеем дело в дедукции. В дедукции нам даются некие общие положения, из которых мы должны были вывести частные положения с помощью силлогизмов. В индукции нам даются частные факты, выявленные в наших наблюдениях, и наша задача состоит в том, чтобы найти такие общие положения, из которых наблюдаемые факты вытекали бы как следствия. По этой причине индукцию часто называют редукцией. Она ведет к созданию действительных понятий из воспринятых умственных образов реальных предметов [2]. При этом следует особенно обратить внимание студентов на тот факт, что в начале своего развития стохастика была чисто индуктивной наукой [1].

При изучении каждого нового вопроса стохастики индукция служит почти единственным путеводителем – она есть эвристический метод стохастики [3].

Математическая абстракция по своему характеру значительно отличается от обыкновенной абстракции. Одним из существенных моментов при создании математических понятий является исключение всего того, что дает наш чувственный опыт (всех эмпирических элементов) и переход к элементам, дающимся нам нашим мышлением (к элементам, имеющим характер постулатов). Однако абстракция употребляется в стохастике не только для образования ее понятий. В дальнейшем процесс вероятностного мышления абстракция и индукция находятся в постоянной связи. Здесь абстракция приобретает обобщающий характер. Затем положения, полученные при помощи частных индукций, с помощью обобщающей абстракции, создают основные понятия, которые могут породить все другие понятия стохастики. Таким образом, обобщающая абстракция позволяет устанавливать самые общие понятия стохастики. С их помощью производятся испытания тех положений, которым был приписан аксиоматический характер. Те определения, которые являются исчерпывающими по отношению к основным и содержат в себе все остальные из этих положений, возводятся в ранг аксим.

Слово *«аналогия»* (analogon) в древности у греков означало «в том же отношении». Они различали аналогию арифметическую, геометрическую и гармоническую. Аналогия приводит к гипотетическим заключениям, проверяемых экспериментальным анализом, при помощи которого может выделяться то, что сходно, от того, что различно, после чего возможна и настоящая индукция. Однако доказательность умозаключения по аналогии может быть как очень велика, так и очень ничтожна. Все зависит от рода сходства, послужившего основанием для заключения по индукции.

Значение аналогии в стохастике зависит от роли, играемой индукцией в математике. Соображения, основанные на аналогии, указывают на направления других, более строгих изысканий. Сравнение не является доказательством, но в большинстве случаев указывает путь к нему. В стохастике опыты заменяются вычислениями на частных примерах, а аналогия нередко дает указания для выбора этих частных примеров. При решении же отдельных частных вопросов и задач аналогия может оказаться весьма полезной. При решении какой-либо задачи можно выделить аналогичные задачи, решенные ранее, и сходство некоторых условий даст нам уверенность предположить, что и решения этих задач будут сходными хотя бы в некоторых чертах, т. е. одно случайное испытание мы можем имитировать другим.

Сам характер математики как научной системы определяет значение дедукции в математике. Итогом любого математического исследования является вывод полученных результатов из небольшого числа общих основных положений, известных ранее. Таким образом, дедукция является в стохастике основной формой систематического изложения математической мысли и одним из сильнейших методов математического исследования. При этом дедукция в различных математических исследованиях сопровождает всякую индукцию, всякий анализ.

Любую систему знаков, применяющуюся для выражения умозаключений, понятий, законов и теорий науки, принято называть языком науки. При этом язык науки представляет собой не какой-либо случайный набор знаков, а их систему. Другими словами, в языке науки каждый знак имеет свое место и находится в определенных отношениях с другими знаками. В язык включаются и правила, в котором его знаки сочетаются. Сочетание знаков в языке изучается в разделе «Семиотика», называемом «Синтактика».

Синтаксис различных языков строится по-разному, часто неоднозначно. Логический и математический языки, где знаки функционируют согласно строгих правил логического и математического исчисления, обладают однозначным синтаксисом. Почти 400 лет назад великий Г. Галилей сказал о математике как о языке науки: «Философия написана в грандиозной книге, которая открыта всегда для всех и каждого, –

я говорю о природе. Но понять ее может лишь тот, кто научится понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на матемтическом языке, а знаки ее – математические формулы». Отсюда и возникают универсальность и единство языка математики. При этом «отметаются» опасности несоизмеримости ее теорий, непереводимости и смысловой разобщенности, что исключает проблемы инвариантной структуры языка математики. Ясность и точность выражения мыслей, уменьшение трудностей при восприятии сообщаемой информации – основные задачи языка науки как системы знаний. Именно поэтому наука обязана разрабатывать собственный, только ей присущий язык, способный максимально точно передавать свойственные ей особенности. Естественно, сказанное относится и к многочисленным прикладным областям деятельности. В частности, по мнению Ж. Пиаже, изучение математических структур приводит к образованию адекватных им умственных структур, которые являются основами не только математического мышления, но и механизмом мышления человека вообще. Так, по мнению выдающегося физика Р. Ф. Фейнмана, математика представляет не просто другой язык, а язык плюс рассуждения, т. е. язык и логику совместно.

То, что математика является языком науки, признано теперь повсеместно. Именно поэтому природа связей, установленных между математическими утверждениями и данными чувственных восприятий, является существенной в вопросе использования математики в прикладных исследованиях. Однако приемлемость математического отображения нельзя оценивать исходя только из правомерности перехода от эмпирических явлений к идеализированным понятиям, а затем к математическим абстракциям. Иначе большенство математических исследований были бы неправомерными, а тот факт, что все математические системы могут быть разработаны в применении к практике, не дает уверенности, что все они легко поддаются такой перестройке. Так, решать системы линейных уравнений легче, чем системы нелинейных, работать с евклидовой геометрией легче, чем с неевклидовой, и т. п. В связи с этим методологическая задача осложняется, сводится к выбору такого математического исчисления, которое было бы простым и удобным в работе, но не слишком искажало суть изучаемых явлений.

Языком для обсуждения различными способами ряда эмпирических проблем является математическая теория вероятностей, которая в последнее время находит все большее применение в науке. При выборе какого-либо математического языка в качестве определяющего для современных академических исследований, скорее всего, был бы выбран язык теории вероятностей [1]. Однако понятие «вероятность», несмотря на свою значимость, является очень сложным. Существует большое количество различных интерпретаций вероятности, предлагаемых современными авторами, некоторые из которых утверждают, что полезными могут быть сразу несколько различных интерпретаций. Это приводит к разным смысловым значениям понятия вероятности в различных контекстах, но при этом почти все согласны с существованием его чисто математических свойств. В итоге все споры сводятся к вопросу интерпретации общепринятого аксиоматического понятия вероятности, а именно: к определению его экстраматематических свойств.

Итак, нет почти никаких разногласий в отношении синтаксиса теории вероятностей, а путаница существует в отношении ее семантики. Доминирующей версией теории вероятностей является аксиоматическая формулировка А. Н. Колмогорова. При этом возможны и другие аксиоматические формулировки. Различают три главные группы значений, содержащих внутри себя наиболее широкое разнообразие интерпретаций, но имеющих между собой глубокие философские различия:

1. Определение величины вероятности как относительной частоты, с которой фиксированное свойство встречается у элементов заданного множества (класса) элементарных исходов, характеризует частотную интерпретацию.

2. Логическая точка зрения на вероятность позволяет рассматривать логическое соотношение между гипотезами и эмпирическими свидетельствами в пользу этих гипотез. Именно поэтому вероятность измеряет степень подтверждения с помощью одного множества высказываний в силу логической необходимости. Это происходит вне зависимости от мнения человека по поводу истинности высказывания другого. Этим устанавливается тесная связь указанной точки зрения с проблемой индукции, что позволяет находить приложения в задаче подтверждения гипотез.

3. Степень доверия, с которой конкретный индивидум считает данное высказывание истинным, измеряется вероятностью. Эта точка зрения устанавливает стандартные методы решения, но допускает различные начальные суждения о вероятности появления событий. При этом нужно уточнить, в каком смысле верно утверждение, так как термины «вероятностный» и «детерминистический» являются полярно противоположными. Аксиоматическая разработка математической теории вероятностей полностью основана на логике дедукции, которая позволяет считать дедуктивную разработку математической теории вероятностей детерминистической, так как при принятых аксиамах выводы достоверны, теоремы всецело детерминированы. Дедуктивная разработка теории вероятностей контрастирует с индуктивными выводами, содержащимися в теории статистики, построение которых коренным образом отличается по форме и допускает неопределенность. Это позволяет связывать статистический вывод с применением определенных правил решения в неопределенных ситуациях.

Так как эти правила выводятся из определенных аксиоматических положений, то их можно считать детерминистическими. Их применение может быть (а может и не быть) связано с появлением вероятностных формулировок. В этом случае они являются «неопределенными».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Гнеденко, Б. В.** Об обучении математике в университетах и педвузах на рубеже двух тысячелетий / Б. В. Гнеденко, Д. Б. Гнеденко. – Москва : КомКнига, 2006. – 160 с.

2. **Евдокимова, Г. С.** Формирование стохастической культуры будущего учителя в образовательном процессе вуза / Г. С. Евдокимова // Известия Смоленского государственного университета. – 2010. – № 2. – С. 281–292.

3. **Евдокимова, Г. С.** Стохастическая компетентность выпускников вуза / Г. С. Евдокимова, В. Д. Бочкарева // Интеграция образования. – 2013. – № 2. – С. 4–8.

Поступила 06.10.2014 г.

Об авторах:

Евдокимова Галина Семеновна, заведующий кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВПО «Смоленский государственный университет» (Россия, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4), доктор педагогических наук, rectorat@smolgu.ru

Бочкарева Вера Дмитриевна, доцент кафедры алгебры и геометрии факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), bochkareva.44@ mail.ru

Для цитирования: Евдокимова, Г. С. Математическая культура – высшее проявление образованности и профессиональной компетентности / Г. С. Евдокимова, В. Д. Бочкарева // Вестник Мордовского университета. – 2015. – Т. 25, № 1. – С. 37–43 DOI: 10.15507/VMU.025.201501.037

REFERENCES

1. Gnedenko B. V., Gnedenko D. B. Ob obuchenii matematike v universitetakh i pedvuzakh na rubezhe dvukh tysyacheletiy [The question of teaching to mathematics at universities and pedagogical institutes at the turn of millenia]. Moscow, KomKniga Publ., 2006, 160 p.

2. Evdokimova G. S. Formirovanie stokhasticheskoy kultury budushchego uchitelya v obrazovatelnom protsesse vuza [Formation of stochastic culture of a future teacher in the educational process of a higher school]. *Izvestiya Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta* – News of Smolensk State University. 2010, no. 2, pp. 281–292.

3. Evdokimova G. S., Bochkareva V. D. Stokhasticheskaya kompetentnost vypusknikov vuza [Stochastic competence of university graduates]. *Integratsiya obrazovaniya* – Integration of Education. 2013, no. 2, pp. 4–8.

About the authors:

Evdokimova Galina Semenovna, head of Applied Mathematics chair, Smolensk State University (4, Przhevalskiy Str., Smolensk, Russia), Doctor of Sciences degree holder in Pedagogical sciences, rectorat@smolgu.ru

Bochkareva Vera Dmitriyevna, associate professor (docent) of Algebra and Geometry chair of Ogarev Mordovia State University (68, Bolshevistskaya Str., Saransk, Russia), bochkareva.44@ mail.ru

For citation: Evdokimova G. S., Bochkareva V. D. Matematicheskaya kultura – vysshee proyavlenie obrazovannosti i professionalnoy kompetentnosti [Mathematical culture – the highest expression of human education and professional competence]. *Vestnik Mordovskogo Universiteta* – Mordovia University Bulletin. 2015, vol. 25, no. 1, pp. 37–43 DOI: 10.15507/VMU.025.201501.037